

Dérivabilité - Exercices

I. Dérivabilité

Exercice I.1. On souhaite démontrer que $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. On se place pour cela dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . Soit $h \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On note M le point du cercle trigonométrique d'abscisse curviligne h et N le point d'intersection de (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.

1. Quelles sont les aires des triangles OIM et OIN en fonction de h ?
2. Quelle est l'aire du secteur angulaire défini par l'angle h ?
3. En déduire que $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$ puis montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
4. En utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.
5. En utilisant les formules d'addition, montrer que $\sin$ et $\cos$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Exercice I.2. Pour chacune des fonctions réelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable (sans se préoccuper de l'étude aux bornes).

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $f_1 : x \mapsto e^x \ln(\sin(x))$; 2. $f_2 : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; 3. $f_3 : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$; | <ol style="list-style-type: none"> 4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{ 1 - x^2 }$; 5. $f_5 : x \mapsto \frac{x}{1 + x }$. |
|---|---|

Exercice I.3. 1. (a) Donner l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$.

(b) Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Si oui, le prolongement obtenu est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la dérivée est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Mêmes questions avec $g(x) = x^x$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice I.4. 1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$x \mapsto \begin{cases} 2x^2 + x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. La fonction f définie par $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$? Si oui, sa dérivée est-elle continue?

3. Trouver $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$x \mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < \alpha \\ x^2 + 12 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$
 soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée continue.

II. Rolle et accroissements finis

Exercice II.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas, alors f n'est pas périodique.

Exercice II.2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ a n solutions dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ a au moins $n - 1$ solutions dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g : x \mapsto e^{\alpha x} f(x)$. Montrer en utilisant g que l'équation $\alpha f(x) + f'(x) = 0$ a au moins $n - 1$ solutions réelles.
3. Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. On suppose que f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{(k)}(x) = 0$ a au moins $n - k$ solutions réelles.

Exercice II.3. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq |x|$; 2. $\forall x \in]0, 1[, \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 3. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a \leq b \Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$;

Exercice II.4. Déterminer la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Exercice II.5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout x de $[0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que : $\forall x \in [0, 1], f'(x) \geq \lambda$.
2. En déduire que si $f(0) = 0$ alors : $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq \lambda x$.

Exercice II.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
On pourra considérer la fonction $g : x \mapsto f(\tan(x))$.

Exercice II.7. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$.
Montrer qu'il existe un point M de $\mathcal{C}_f$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M passe par O .

On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

Exercice II.8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice II.9. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout entier $n > 0$.

1. En utilisant l'IAF, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$.
2. En déduire un encadrement de $\frac{1}{k^\alpha}$ pour $k \geq 2$.
3. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donner un équivalent de $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que : $\frac{1}{b} \leq \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} \leq \frac{1}{a}$.

En déduire la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

III. Dérivations successives

Exercice III.1. Calculer les dérivées n -ième des fonctions (où $n \in \mathbb{N}^*$) :

1. $f(x) = x^2(1+x)^n$
2. $g(x) = x^{n-1} \ln x$
3. $h(x) = x^2 e^{-x}$

Pour h , on pourra commencer par calculer $h', h'', h^{(3)}$, puis procéder par récurrence.

Exercice III.2. 1. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :
$$x \mapsto \begin{cases} 2+x & \text{si } x \geq 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? et $\mathcal{C}^2$?

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$x \mapsto \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \geq 1 \\ e^x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$
. Pour quelles valeurs de a, b, c la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$? Est-elle alors de classe $\mathcal{C}^3$?

Exercice III.3. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note argsh sa fonction réciproque. Justifier que argsh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer argsh' .

Exercice III.4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$. On souhaite montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor-Lagrange.

1. Écrire la formule pour $n = 0$ et la démontrer.

2. Justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - A(b-a)^{n+1} = 0$.

On pose $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - A(b-x)^{n+1}$.

3. Justifier que g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

4. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

5. En déduire la formule de Taylor-Lagrange.

IV. Applications

Exercice IV.1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude de f .

(a) Étudier les variations de f .

(b) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$.

(c) Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

(d) Justifier que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

2. Étude de (u_n) : première méthode.

(a) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) Montrer que (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante.

(c) En déduire que (u_n) converge vers α .

3. Étude de (u_n) : deuxième méthode.

(a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |u_n - \alpha|$.

(b) Montrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

(c) En déduire la limite de (u_n) .

(d) Pour quelle valeur de n le terme u_n donne une valeur approchée de α à 10^{-6} près?

Exercice IV.2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2. À l'aide de l'IAF, montrer que (u_n) converge vers 1.

Exercice IV.3. On considère l'équation $(E) : (x-1)e^x + x = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle α et déterminer sa partie entière.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

(a) En étudiant la fonction $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, montrer que la suite (u_n) converge vers α .

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$.

Exercice IV.4. Étudier les suites récurrentes définies par :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$.

2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{6}{2 + u_n^2}$.

3. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{2(u_n + 1)}$.

4. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{\ln(u_n) + 1}$.

Exercice IV.5. Étudier complètement les fonctions suivantes (ensemble de définition, régularité, variations, limites, prolongements éventuels, asymptotes, tracé) :

$$1. f(x) = \ln\left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right) \qquad 2. g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} e^{\frac{1}{x}} \qquad 3. h(x) = x^{x+1}$$

Exercice IV.6. On définit $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ et $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = t - \sin t$ et $\psi(t) = 1 - \cos t$.

1. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
2. On définit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$. Justifier que f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$.
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire?
5. Calculer $\varphi(2\pi - \varphi^{-1}(x))$ puis $\varphi^{-1}(2\pi - x)$ et en déduire que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $x = \pi$.
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

V. Convexité

Exercice V.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. On suppose que f est convexe sur I .
 - (a) Montrer que pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < c < b$, on a : $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$.
On commencera par faire un dessin.
 - (b) En déduire que f' est croissante sur I .
2. On suppose que f' est croissante sur I .
 - (a) Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. On considère la fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto tf(a) + (1 - t)f(b) - f(ta + (1 - t)b)$. Justifier que g est dérivable sur $[0, 1]$ et que g' est monotone sur $[0, 1]$.
 - (b) En déduire que g est d'abord croissante puis décroissante sur $[0, 1]$.
 - (c) En déduire que f est convexe sur I .

Exercice V.2. 1. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
3. Montrer que : $\forall x, y > 1, \sqrt{\ln(x)\ln(y)} \leq \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
4. Soit $n \geq 2$. Montrer que pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice V.3. Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. L'aire de OIM vaut $\frac{\sin h}{2}$ et l'aire de OIN vaut $\frac{\tan h}{2}$.
2. $\frac{h}{2}$.
3. On a $\frac{\sin h}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\tan h}{2}$, donc $\frac{\sin h}{h} \leq 1$ et $\cos h \leq \frac{\sin h}{h}$. D'après les gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$, et $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin -h}{-h} = 1$.
4. Comme $\cos^2 h - 1 = \sin^2 h$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = 0$.
5.
$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos x.$$
$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin x.$$

Exercice I.2 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\iff x \in D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. La fonction $\sin$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in D$, $\sin(x) > 0$. La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction $\exp$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par opérations, la fonction f_1 est donc définie et dérivable sur D .
2. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Or $\frac{1-x}{1+x} \in [-1, 1] \iff x \geq 0$ en faisant l'étude de la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$. De plus, $\frac{1-x}{1+x} = 1 \iff x = 0$ et l'équation $\frac{1-x}{1+x} = -1$ n'a pas de solution. Par composition, la fonction f_2 est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Les solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et 2. La fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Donc $x \mapsto |x^2 - 3x + 2|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, $|x^2 - 3x + 2| > 0$. La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
4. $x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1$. La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc $x \mapsto |1 - x^2|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|1 - x^2| \geq 0$, et $|1 - x^2| = 0 \iff x = \pm 1$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
5. La fonction $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Par composition et multiplication, f_5 est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice I.3 :

1. (a) $D_f = \mathbb{R}^*$.
(b) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, on peut prolonger f par continuité en 0 par $f(0) = 0$. $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. Donc f' est pas continue en 0.
2. $D_g = \mathbb{R}_+^*$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$. $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0. La courbe a une tangente verticale en 0.

Exercice I.4 :

1. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Puis, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, donc f est continue en 1. Si $x < 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 2x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 5$ et si $x \leq 1$, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = x + 4 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 5$. Donc f est dérivable en 1.
2. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{\sqrt{x}^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$. Donc elle est dérivable en 0. De plus, si $x > 0$, $f'(x) = -\frac{\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2}$. Sa dérivée est donc continue.
3. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{\alpha\}$ et sa dérivée est continue. $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = a\sqrt{\alpha}$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \alpha^2 + 12$. On doit donc avoir $a\sqrt{\alpha} = \alpha^2 + 12$ pour que f soit continue.
Si $x < \alpha$, $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = a \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{x - \alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^-} \frac{a}{2\sqrt{\alpha}}$ et si $x \geq \alpha$, $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^+} 2\alpha$. On doit donc avoir $\frac{a}{2\sqrt{\alpha}} = 2\alpha$ pour que f soit dérivable. Ce qui donne $4\alpha^2 = \alpha^2 + 12 \iff \alpha^2 = 4$ donc $\alpha = 2$ car $\alpha > 0$. Puis $a = 8\sqrt{2}$.
On vérifie alors que f' est bien continue en α .

Exercice II.1 : On procède par contraposée. Supposons que f est périodique de période T . Alors f est continue sur $[0, T]$, dérivable sur $]0, T[$ et $f(0) = f(T)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, T[$ tel que $f'(c) = 0$. Donc f' s'annule. On conclut par contraposée.

Exercice II.2 :

1. Notons $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ les solutions de $f(x) = 0$ rangées dans l'ordre. Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La fonction f est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ et dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ et $f(a_i) = f(a_{i+1})$. D'après Rolle, il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i) = 0$. De plus, on a $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$, donc $f'(x) = 0$ a au moins $n-1$ solutions.
2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit. De plus, l'équation $g(x) = 0$ admet n solutions. D'après la question précédente, l'équation $g'(x) = 0$ admet au moins $n-1$ solutions. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x))$. Donc $g'(x) = 0 \iff \alpha f(x) + f'(x) = 0$. Donc l'équation $\alpha f(x) + f'(x) = 0$ admet au moins $n-1$ solutions.
3. On raisonne par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. L'initialisation est l'hypothèse : pour $k=0$, l'équation $f^{(0)}(x) = 0$ a bien n solutions. Pour l'hérédité on prend $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et on suppose que si f est k fois dérivable, alors $f^{(k)}(x) = 0$ a au moins $n-k$ solutions. On suppose que f est dérivable $k+1$ fois. Alors la fonction $f^{(k)}$ est dérivable et l'équation $f^{(k)}(x) = 0$ admet au moins $n-k$ solutions par HR. En appliquant la première question, $(f^{(k)})'(x) = 0$ admet au moins $n-k-1 = n-(k+1)$ solutions.

Exercice II.3 :

1. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leq 1$, on applique l'IAF : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x - \sin 0| \leq 1|x-0|$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est croissante. Donc si $x \in]0, 1[, \forall y \in]0, x[, \arcsin'(y) \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, puis on applique l'IAF.
3. On applique l'IAF sur l'intervalle $[a, b]$ à la fonction $x \mapsto \arctan x$, car on a $\forall x \in [a, b] \frac{1}{1+b^2} \leq \arctan' x \leq \frac{1}{1+a^2}$.

Exercice II.4 : Posons $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. D'après le TAF, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, il existe $c_x \in [x, x+1]$ tel que $f'(c_x) = (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} c_x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c_x) = 1$.

Exercice II.5 :

1. Comme f est $\mathcal{C}^1$, f' est continue sur le segment $[0, 1]$. Elle admet donc un minimum $\lambda = f'(x_{min}) > 0$.
2. On applique l'IAF sur l'intervalle $[0, x]$.

Exercice II.6 : On pose $g : x \mapsto f(\tan(x))$. La fonction g est définie et dérivable sur $] -\pi/2, \pi/2[$ par composition. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2} g(x) = \ell$, donc g est prolongeable par continuité sur $[-\pi/2, \pi/2]$, avec $g(-\pi/2) = g(\pi/2)$. D'après Rolle, il existe $c \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = (1 + \tan^2(c))f'(\tan(c))$. Donc $f'(\tan(c)) = 0$.

Exercice II.7 : La tangente a pour équation $y = f'(x_M)x$ et aussi $y = \frac{f(x_M) - f(0)}{x_M - 0}x$. On cherche donc un nombre $x \in]0, 1[$ tel que $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Posons $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = f'(0) = 0$, g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ et $g(0) = 0 = g(1)$. D'après Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$, donc $f'(c)c - f(c) = 0$, d'où $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

Exercice II.8 : Quitte à multiplier f par -1 , supposons que $f(1) > 0$ et $f'(1) < 0$. Supposons par l'absurde que $\forall x \in [0, 1], f'(x) < 0$. Alors d'après le TAF, f est décroissante sur $[0, 1]$. Donc $f(0) \geq f(1)$ ce qui est une contradiction. Ainsi, il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f'(x) \geq 0$. Comme f' est continue et $f'(1) < 0$, d'après le TVI, il existe $c \in [x, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice II.9 :

1. On applique l'IAF à la fonction $x \mapsto x^{1-\alpha}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$.
2. $k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha} \geq \frac{1-\alpha}{k^\alpha} \geq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ pour $k \geq 2$.
3. On fait la somme des encadrements de $k = 2$ à n : $n^{1-\alpha} - 1 \geq (1-\alpha)(u_n - 1) \geq (n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}$. En divisant par $n^{1-\alpha}$, on peut appliquer les gendarmes et on trouve que $u_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
4. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice II.10 : On applique l'IAF à la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ pour que pour tout $x \in [a, b]$, $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ pour obtenir l'encadrement. Prenons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on applique l'inégalité de droite avec $a = k$ et $b = k+1$: $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

En sommant et en télescopant : $\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

On applique l'inégalité de gauche avec $a = k-1$ et $b = k$ (attention, ici on a bien $k \geq n+1 > 1$). En sommant et en télescopant, on trouve : $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln(2n) - \ln(n)$.

Or $\ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln(2) + \ln(n) + \ln(1+1/(2n)) - \ln(n) - \ln(1+1/n) \rightarrow \ln(2)$, et $\ln(2n) - \ln(n) = \ln(2)$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln(2)$.

Exercice III.1 :

1. Si $n = 1$, $f'(x) = 2x + 3x^2$, pour $n \geq 2$, $f^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x^2)^{(j)} ((1+x)^n)^{(n-j)} = n!x^2 + 2nn!x(1+x) + n(n-1)\frac{n!}{2}(1+x)^2 = n! \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{2} x^2 + (n^2 + n)x + \frac{n^2 - n}{2} \right)$.

$$2. h^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!} x^{n-1-j} (-1)^{n-j-1} \frac{(n-j-1)!}{x^{n-j}} = \frac{(n-1)!}{x}.$$

$$3. \text{ Par récurrence, } i^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 - 2nx + n(n-1)) e^{-x}$$

Exercice III.2 :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ donc f est $\mathcal{C}^0$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ donc f est $\mathcal{C}^1$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x)$, donc f n'est pas $\mathcal{C}^2$.

2. On doit avoir $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e = a + b + c = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = e = 2a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f''(x) = e = 2a = \lim_{x \rightarrow 1^+} f''(x)$.
Donc $a = \frac{e}{2}$, $b = 0$ et $c = \frac{e}{2}$. Alors, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f^{(3)}(x) = 0 \neq e = \lim_{x \rightarrow 1^-} f^{(3)}(x)$.

Exercice III.3 : La fonction sh est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$ qui est strictement positive. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le TBM, sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (en regardant les limites de sh). De plus, sh' ne s'annule jamais, donc argsh est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\text{ch}(\text{argsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice III.4 :

1. Pour $n = 0$ c'est $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$, c'est le TAF.

2. Comme $b \neq a$, on prend $A = \frac{f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k}{(b-a)^{n+1}}$.

3. Comme f est $\mathcal{C}^n$, g est continue, et comme f est $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$, g est dérivable sur $]a, b[$.

4. $g(a) = 0$ par définition de A et $g(b) = 0$, donc on peut appliquer Rolle.

5. On dérive $g : g'(x) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!} (b-x)^k - \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} (b-x)^{k-1} + (n+1)A(b-x)^n = - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + (n+1)A(b-x)^n$. En prenant pour $x = c$, on trouve $A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, ce qui donne la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice IV.1 :

1. Étude de f .

(a) f est décroissante sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$.

(b) $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

(c) $|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2}$ qui est maximale pour $x = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq \frac{1}{(1+1/2)^2} = \frac{4}{9}$.

(d) La fonction $g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. D'après le TVI, il y a une seule solution à l'équation $g(x) = 0$. On remarque de plus que $g(1) = -\frac{1}{2}$, donc $\alpha \in [0, 1]$.

2. Étude de (u_n) : première méthode.

(a) Immédiat car $f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(b) Comme $f \circ f$ est croissante sur $[1/2, 1]$, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. On compare ensuite $u_0 = 1 \geq u_2 = \frac{2}{3}$ et $u_1 = \frac{1}{2} \leq u_3 = \frac{3}{5}$. On peut aussi plus généralement étudier le signe de $x \mapsto f(f(x)) - x$.

(c) Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées, donc elles convergent. On vérifie alors que $f \circ f$ n'a que α comme point fixe dans $[1/2, 1]$, donc (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite et (u_n) tend vers α .

3. Étude de (u_n) : deuxième méthode.

(a) On utilise l'IAF entre u_n et α .

(b) On remarque que $|u_0 - \alpha| \leq 1$ car u_0 et $\alpha \in [0, 1]$.

(c) $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

(d) On doit avoir $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-6}$, donc $n \geq 17,03$. On prend donc $n = 18$.

Exercice IV.2 :

1. On pose $f(x) = \frac{1}{3}(4 - x^2)$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. En étudiant la fonction, on voit que $f\left(\left[0, \frac{4}{3}\right]\right) = \left[\frac{20}{27}, \frac{4}{3}\right] \subset \left[0, \frac{4}{3}\right]$. On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2. Déjà, on a $f(1) = 1$. Puis on remarque que $\forall x \in \left[0, \frac{4}{3}\right], |f'(x)| \leq \frac{8}{9}$. En utilisant l'IAF, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{8}{9}|u_n - 1|$, donc par récurrence, $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n$. Puis on utilise les gendarmes.

Exercice IV.3 :

- On pose $f(x) = (x-1)e^x + x$, $f'(x) = xe^x + 1$ et $f''(x) = (x+1)e^x$. Donc f' est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$ et $f'(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ donc f' est strictement positive. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, la fonction f s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ entre 0 et 1 : $[\alpha] = 0$.
- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.
 - $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. Puis, $u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$ et par récurrence, on montre que (u_n) est croissante. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, f est majorée par 1, donc (u_n) aussi. Ainsi (u_n) converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell = f(\ell) \iff \ell e^\ell + \ell = e^\ell \iff (\ell - 1)e^\ell + \ell = 0$. Donc $\ell = \alpha$.
 - On cherche d'abord à majorer $f'(x)$. Pour cela, on calcule $f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \leq 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$, donc $f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{4}$ sur $[0, 1]$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$, on applique l'IAF : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
 - On raisonne par récurrence.

Exercice IV.4 :

- On pose $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. En dressant le tableau de variations de f , on remarque que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. De plus f est croissante sur $[0, 1]$, donc par récurrence, (u_n) est décroissante. Donc elle converge vers un point fixe de f : c'est 0.
- En calculant les premiers termes, on voit que $u_0 = u_2 = u_4 = 1$ et $u_1 = u_3 = 2$. On montre par récurrence que $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = 2$.
- On pose $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2(x+1)}$, puis on dresse son tableau de variations. On voit alors que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$, et comme $u_1 = \frac{3}{2}$, on montre par récurrence que pour $n \geq 1$, $u_n \in [1, +\infty[$. Comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ et $u_2 = \frac{21}{20} < u_1$, on montre que (u_n) est décroissante. Ainsi elle converge vers un point fixe de f : c'est 1.
- On pose $f(x) = \frac{2x}{\ln(x) + 1}$. On remarque que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$ et que f est croissante sur cet intervalle. Ainsi, la suite (u_n) est croissante. Si elle convergeait, ce serait vers un point fixe de f qui sont 0 et e. On remarque que $f([1, e]) \subset [1, e]$, donc (u_n) est majorée par e, donc converge vers e.

Exercice IV.5 :

- $D_f =]-\infty, 0[\cup]1/\ln(2), +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln(2)$, donc prolongeable en 0, et même $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $f'(0) = 0$. $\lim_{x \rightarrow 1/\ln(2)^+} f(x) = -\infty$ donc asymptote verticale $x = \frac{1}{\ln(2)}$. De plus $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2(e^{\frac{1}{x}} - 2)} \geq 0$, donc f est croissante. Asymptote horizontale $y = 0$ en $\pm\infty$: $f(x) = \ln\left(2 - e^{\frac{1}{x}}\right)$.
- $D_g = \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, donc ne se prolonge pas en 0. $g'(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$, on étudie le signe de $x^3 - x^2 + 3x + 1$ en regardant ses variations (elle est strictement croissante). Asymptote verticale $x = 0$, oblique $y = x - 1$.
- $D_h = \mathbb{R}_*^+$, mais $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$, donc prolongeable en 0, par contre pas $\mathcal{C}^1$ en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$. Pas d'asymptote, strictement croissante.

Exercice IV.6 :

- φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$ car $t \mapsto t$ et $t \mapsto \sin t$ sont $\mathcal{C}^1$. De plus, $\varphi'(t) = 1 - \cos(t) > 0$ sur $]0, 2\pi[$, donc φ est strictement croissante. Enfin, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2\pi) = 2\pi$. D'après le théorème de la bijection monotone, φ admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$.
- Comme ψ et φ^{-1} sont continues sur $[0, 2\pi]$, f l'est aussi. De même f est dérivable sur $]0, 2\pi[$.
- $f'(x) = (\varphi^{-1})'(x)\psi'(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \sin(\varphi^{-1}(x))$ qui est du signe de $\sin(\varphi^{-1}(x))$. Donc $f'(x) \geq 0 \iff \varphi^{-1}(x) \in [0, \pi]$. Comme φ est croissante et $\varphi(\pi) = \pi$, $\varphi^{-1}(x) \in [0, \pi] \iff x \in [0, \pi]$. Ainsi f est croissante sur $[0, \pi]$ et décroissante sur $[\pi, 2\pi]$.
- $f'(x) \sim \frac{\varphi^{-1}(x)}{\frac{\varphi^{-1}(x)^2}{2}} \sim \frac{2}{\varphi^{-1}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. La courbe a une tangente verticale en 0.
- $\varphi(2\pi - \varphi^{-1}(x)) = 2\pi - \varphi^{-1}(x) - \sin(2\pi - \varphi^{-1}(x)) = 2\pi - \varphi^{-1}(x) - \sin(\varphi^{-1}(x)) = 2\pi - x$, donc $2\pi - \varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(2\pi - x)$. Ainsi $f(2\pi - x) = \psi(2\pi - \varphi^{-1}(x)) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$.

Exercice V.1 :

- Comme $c \in]a, b[$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que $c = ta + (1-t)b$. On obtient que $c - a = (1-t)(b-a)$. Par convexité, $f(c) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$. Donc
 - $f(c) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$, puis $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq (1-t) \frac{f(b) - f(a)}{c - a} = (1-t) \frac{f(b) - f(a)}{(1-t)(b-a)}$;
 - $f(b) - f(c) \geq t(f(b) - f(a))$, et on divise par $b - c = t(b-a)$.

- (b) Soit $x < y$. Pour tout $h > 0$ assez petit, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ($c = x+h$). En passant à la limite lorsque $h \rightarrow 0$, $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. De même, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(y-h)}{h}$ ($c = y-h$), donc $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$. D'où $f'(x) \leq f'(y)$.
2. (a) g est dérivable par composition. De plus, pour $t \in [0, 1]$, $g'(t) = f(a) - f(b) + (b-a)f'(ta + (1-t)b)$. Comme f' est croissante et $t \mapsto t(a-b) + b$ est décroissante, g' est décroissante sur $[0, 1]$.
- (b) On a $g(0) = g(1) = 0$, d'après Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$. Par monotonie de g' , pour tout $0 \leq t \leq c$, $g'(t) \geq 0$ et pour $c \leq t \leq 1$, $g'(t) \leq 0$. Donc g est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$.
- (c) Comme g est croissante sur $[0, c]$ et $g(0) = 0$, on a pour tout $t \in [0, c]$, $g(t) \geq g(0) = 0$. De même pour tout $t \in [c, 1]$, $g(t) \geq g(1) = 0$.
Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $g(t) \geq 0$. D'où pour tout $a < b \in I$ et $t \in [0, 1]$, $tf(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta + (1-t)b)$: f est convexe.

Exercice V.2 :

- La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est positive. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, $e^{tx+(1-t)y} \leq te^x + (1-t)e^y$.
On prend alors $t = \frac{1}{2}$.
- Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, la dérivée seconde de sinus est négative, donc sinus est concave : elle est en-dessous de sa tangente en 0 ($y = x$) et au-dessus de sa sécante qui joint $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$ ($y = 2x/\pi$).
- Par croissance de $\ln$, l'inégalité cherchée est équivalente à $\frac{1}{2} \ln(\ln(x)) + \frac{1}{2} \ln(\ln(y)) \leq \ln(\ln(x/2 + y/2))$. La fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave (en dérivant deux fois), donc on obtient l'inégalité voulue.
- La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ est convexe sur $[-1, +\infty[$ en dérivant deux fois. Donc elle est au-dessus de sa tangente en 0 ($y = 1 + nx$).

Exercice V.3 : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$. Par convexité de f : $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. Par croissance de g , $g \circ f(tx + (1-t)y) \leq g(tf(x) + (1-t)f(y))$. On utilise enfin la convexité de g .