

Étude d'une suite récurrente

Lorsque $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on souhaite étudier une suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} .$$

1. On commence par étudier la fonction : on détermine son ensemble de définition, si elle est continue, dérivable, ... Puis on dresse son tableau de variations.
Dans les exercices, la fonction f sera en général au moins dérivable.
2. On cherche ses points fixes : on résout l'équation $f(x) = x$. Les solutions sont les seules limites finies possibles pour la suite (u_n) (c'est un théorème du cours).
On rajoute les points fixes dans le tableau de variations. On peut aussi placer les premières valeurs de la suite.
3. On cherche un intervalle $J \subset I$ tel que :
 - $u_0 \in J$;
 - f est monotone sur J ;
 - $f(J) \subset J$: J est stable par f .
4. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n est bien défini et $u_n \in J$.
5. (a) Si f est croissante sur J :
 - si $u_1 \leq u_0$, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} \leq u_n$.
 - si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \leq u_{n+1}$.

On a donc une suite monotone. Si elle est bornée, elle converge vers un point fixe de f .
- (b) Si f est décroissante sur J , on étudie les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) : en utilisant la fonction $f \circ f$, qui est croissante, on montre que ces deux suites sont monotones de monotonies contraires, et si elles convergent et ont la même limite, alors (u_n) converge aussi.
Parfois, ces deux sous-suites sont adjacentes.
6. Pour obtenir une valeur approchée de la limite de (u_n) , on utilise le TAF : si f est k -lipschitzienne sur I , alors on montre par récurrence sur n que $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$. Lorsque $k \in [0, 1[$, on prend n assez grand pour que $k^n |u_0 - \ell|$ donne la précision voulue.