

Colles 20 - 09/03/2026 au 13/03/2026**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 17 : Dérivabilité.
Exercices traités en classe : I.1,2,3,4, II.1, 2, 6, 10, III.1,2, V.1,2
- Chapitre 18 : Polynômes.
 1. Polynômes à une indéterminée, degré.
 2. Opérations sur les polynômes.
 3. Dérivation formelle.
 4. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles.
 5. Formule de Taylor.**Exercices traités en classe :** I.1, I.3, II.2, II.4.

Questions de cours**Question 1**

- Définition de f est convexe et illustration avec un dessin. Énoncer la caractérisation de la convexité pour les fonctions 2 fois dérivables (sans la démonstration). Établir les inégalités : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$ et $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
- Énoncer la formule de Leibniz. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{3x}}{1+x}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et calculer sa dérivée n -ième pour $n \in \mathbb{N}$.
- C17 Exercice V.2 : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a < c < b$ dans I . Montrer que si f est convexe sur I , alors $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$. En déduire que si f est convexe et dérivable sur I , alors f' est croissante sur I .
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité.
- Donner les formules pour le degré de la somme, du produit, de la composée de deux polynômes. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \llbracket 0, \deg(P) \rrbracket$, alors $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$, démonstration.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1. Montrer que P est irréductible.
- C18 Exercice I.1 : soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant le coefficient du monôme de degré $2n$ de $P = (X^2 - 1)^{2n}$, montrer que $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.
- Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Calculer $((X - \alpha)^n)^{(p)}$. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes. Montrer la formule dans le cas $\alpha = 0$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1.
 - ▷ Extremum local et dérivée.
 - ▷ Théorème de Rolle.
 - ▷ Théorème des accroissements finis.
 - ▷ Monotonie et dérivée.
 - ▷ Limite de la dérivée.
 - ▷ Inégalité des accroissements finis.
 - ▷ Formule de Leibniz.
 - ▷ Fonction convexe et position des sécantes/tangentes.
 - ▷ Caractérisation de la convexité pour les fonctions deux fois dérivables.

- ▷ Degré et opérations sur les polynômes.
- ▷ Degré et dérivation formelle.
- ▷ Divisibilité et degré.
- ▷ Théorème de la division euclidienne.
- ▷ Factorisation en facteurs irréductibles unitaires.
- ▷ Formule de Taylor pour les polynômes.

A savoir faire

1. Savoir prouver la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle/en un point.
2. Savoir appliquer Rolle, le TAF et l'IAF.
3. Savoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour vérifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Savoir appliquer la formule de Leibniz.
5. Savoir appliquer la convexité/concavité pour démontrer des inégalités.
6. Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
7. Savoir poser la division euclidienne de deux polynômes.