

Devoir Surveillé 6

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.**Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.**La calculatrice est interdite.***Exercice 1 (Huit questions indépendantes).**

- Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Rappeler la définition de $u_n \rightarrow -\infty$.
 - Soient (u_n) et (M_n) deux suites réelles pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_n \leq M_n$ et $M_n \rightarrow -\infty$. Montrer que $u_n \rightarrow -\infty$.
- Déterminer la limite de $u_n = n(2 + \cos(n))$.
- Montrer que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
- Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$.
 - Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - Justifier que f est continue sur son ensemble de définition.
 - Prouver que f est prolongeable par continuité en 0.
- Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de :

(a) $\frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$	(b) $\frac{\tan(3x)}{e^x-1}$	(c) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$	(d) $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$
---------------------------------	------------------------------	---------------------------	---

Exercice 2 (Une droite).Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(3, 4)$ et $(7, 15)$. On note D la droite (AB) .Soit $f : x \mapsto \frac{11x^2 - 39x + 38}{4x - 8}$.

- Déterminer une équation de la droite D .
- Prouver que la droite D est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$. Préciser la position relative de D et $\mathcal{C}$.

Exercice 3 (Série alternée).Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x_k$, et $v_n = S_{2n}$ et $w_n = S_{2n+1}$.

- Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
- Que peut-on en déduire sur la suite (S_n) ?

Exercice 4 (Une étude de suite).

Soit $f :]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

1. On pose $h : x \mapsto x \sin(x) - 1 + \cos(x)$.
 - (a) Justifier que f est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (b) Prouver que f est prolongeable par continuité en 0.
 - (c) Déterminer les variations puis le signe de h sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (d) En déduire les variations de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (e) Justifier que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. On pose $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Justifier que la suite (u_n) est bien définie et bornée.
 - (b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
 - (c) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 5 (Des matrices).

On pourra utiliser les résultats de la partie I pour traiter les parties II et III. Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On note $\text{tr}(A) = a + d$, et pour tout $t \in \mathbb{K}$, $f_A(t) = \det(tI_2 - A)$.

1. Déterminer deux scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall t \in \mathbb{K}$, $f_A(t) = t^2 - \alpha t + \beta$.
2. Prouver que $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = 0_2$.
3. **En déduire** que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide de A et I_2 .
4. Prouver que si $\det(A) = 0$, alors il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = 0$.
On pourra considérer le produit $A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
5. (a) Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \ll \exists a_n, b_n \in \mathbb{K} \mid A^n = a_n A + b_n I_2 \gg$$

Lors de l'hérédité, on fera apparaître des relations de récurrences pour les suites (a_n) et (b_n) .

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 0$ et $b_{n+2} - \alpha b_{n+1} + \beta b_n = 0$.
6. On suppose que $\alpha \neq 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $A^2 M = M A^2$. Prouver que $AM = MA$.

Partie II

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_B(t) = \det(tI_2 - B)$.

7. Déterminer les solutions de $f_B(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
8. Résoudre les systèmes linéaires $(S_2) : (B - 2I_2)X = 0$ et $(S_3) : (B - 3I_2)X = 0$. On écrira les ensembles des solutions sous la forme $\text{Vect}(U_2)$ et $\text{Vect}(U_3)$, où $U_2, U_3 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dont les deux colonnes sont U_2 et U_3 .

9. Prouver que P est inversible et déterminer P^{-1} .
10. Calculer $D = P^{-1}BP$.
11. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}B^nP$.
12. En déduire l'expression de B^n en fonction de n .
13. En utilisant la question 5b, déterminer l'expression de B^n en fonction de B et I_2 puis retrouver le résultat de la question précédente.

Partie III

On considère de nouveau la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on suppose que $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$.

14. Justifier que l'équation $f_A(t) = 0$ admet deux solutions $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distinctes.
15. **Sans les résoudre**, prouver que les systèmes $(\lambda I_2 - A)X = 0$ et $(\mu I_2 - A)X = 0$ admettent chacun au moins une solution non nulle.
On note U_λ (respectivement U_μ) une solution non nulle de $(\lambda I_2 - A)X = 0$ (respectivement de $(\mu I_2 - A)X = 0$). On ne tentera pas de déterminer ces solutions.

On note $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont U_λ et U_μ .

16. (a) Que vaut le produit AU_λ ?
(b) En déduire les deux colonnes de la matrice AP .
(c) Vérifier que $AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Une autre suite).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto x - \ln(x) - n$, et on considère l'équation $(E_n) : f_n(x) = 0$.

1. Étudier la fonction f_n (ensemble de définition, dérivabilité, variations).
2. Déterminer les solutions de (E_0) et (E_1) .
3. Justifier que pour tout $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans l'intervalle $]0, 1[$.
On notera cette solution x_n .
4. **Étude de la suite** (x_n)
 - (a) Pour tout $n \geq 2$, comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.
 - (b) En déduire la monotonie de (x_n) .
 - (c) Justifier que (x_n) converge vers une limite ℓ .
 - (d) Prouver que $\ell = 0$.
 - (e) En considérant la suite $(e^{f_n(x_n)})$, montrer que $x_n \sim e^{-n}$.
 - (f) Pour tout $n \geq 2$, on pose $\alpha_n = x_n - e^{-n}$.
 - i. Vérifier que : $\forall n \geq 2, \ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) = x_n$.
 - ii. En déduire la limite de $\frac{\alpha_n}{e^{-n}}$.
 - iii. Montrer alors que $\alpha_n \sim e^{-2n}$.
5. Pour tout $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n x_k$.
 - (a) Étudier la monotonie de la suite (S_n) .
 - (b) Justifier qu'il existe $N \geq 2$ tel que $\forall n \geq N, x_n \leq \frac{3}{2}e^{-n}$.
 - (c) Montrer alors que la suite (S_n) converge.

Correction du Devoir Surveillé 6

Correction de l'exercice 1 :

- $\forall A \in \mathbb{R}_-, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A.$
 - Soit $A \in \mathbb{R}_-.$ Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', M_n \leq A.$ On pose $N'' = \max(N, N').$ Alors pour tout $n \geq N'',$ $u_n \leq M_n$ et $M_n \leq A,$ donc $u_n \leq A.$ Ainsi, $u_n \rightarrow -\infty.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}, \cos(n) \geq -1,$ donc $2 + \cos(n) \geq 1$ et $u_n \geq n.$ Comme $n \rightarrow +\infty,$ par minoration, $u_n \rightarrow +\infty.$
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$
 - Analyse : soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = A + S.$ Alors $M^\top = A^\top + S^\top = -A + S.$ Donc $2S = M + M^\top$ et $S = \frac{M + M^\top}{2},$ puis $A = \frac{M - M^\top}{2}.$
 - Synthèse : posons $S = \frac{M + M^\top}{2}$ et $A = \frac{M - M^\top}{2}.$ On a alors $S + A = M$ et $S^\top = S$ donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A^\top = -A,$ donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$

M s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

- On applique directement le pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction f est bornée et atteint ses bornes.
- Soit $g : x \mapsto f(x) - x.$ La fonction g est continue sur $[a, b]$ par opérations. De plus, $g(a) = f(a) - a \leq 0$ et $g(b) = f(b) - b \geq 0.$ D'après le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0.$ Donc $f(c) = c.$ Ainsi, f admet au moins un point fixe.
- Soit $x \in \mathbb{R}.$ La fonction f est définie en x ssi $x + 4 \geq 0$ et $\sqrt{x+4} - 2 \neq 0.$ Ce qui donne $D_f =]-4, 0[\cup]0, +\infty[.$
 - f est continue sur $] -4, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations.
 - $\sqrt{x+4} - 2 = 2(\sqrt{1+x/4} - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{4}$ et $\sin(2x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x,$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 8.$ Ainsi, f admet une limite finie en 0. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 8.$
- $\frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$ Donc $\frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$
 - $\frac{\tan(3x)}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3x}{x} = 3.$ Donc $\frac{\tan(3x)}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3.$
 - $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)},$ et $\frac{1}{x} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1.$ Donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$
 - Comme $\cos(2x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\cos(3x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$ $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \frac{\ln(1 + (\cos(2x) - 1))}{\ln(1 + (\cos(3x) - 1))} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos(3x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{(2x)^2}{2}}{-\frac{(3x)^2}{2}} = \frac{4}{9}.$ Donc $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{4}{9}.$

Correction de l'exercice 2 :

- La pente de D vaut $\frac{11}{4}.$ Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{11}{4}x + b$ est une équation de $D.$ Comme $A \in B,$ $4 = \frac{33}{4} + b$ donc $b = -\frac{17}{4}.$ Ainsi, une équation de D est $y = \frac{11}{4}x - \frac{17}{4}.$
- $f(x) - \left(\frac{11}{4}x - \frac{17}{4}\right) = \frac{1}{x-2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$ Donc D est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty.$ De plus, pour tout $x > 2,$ $\frac{1}{x-2} > 0,$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de D au voisinage de $+\infty.$

Correction de l'exercice 3 :

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}x_{2n+2} + (-1)^{2n+1}x_{2n+1} = x_{2n+2} - x_{2n+1}$. Comme (x_n) est décroissante, $x_{2n+2} \leq x_{2n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite (v_n) est décroissante.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3}x_{2n+3} + (-1)^{2n+2}x_{2n+2} = -x_{2n+3} + x_{2n+2}$. Comme (x_n) est décroissante, $x_{2n+3} \leq x_{2n+2}$, donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$. La suite (w_n) est croissante.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n - v_n = (-1)^{2n+1}x_{2n+1}$, donc $|w_n - v_n| = |x_{2n+1}|$. Or la suite (x_{2n+1}) est extraite de la suite (x_n) , donc elle converge aussi vers 0. Ainsi, $|w_n - v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Les suites (v_n) et (w_n) sont bien adjacentes.

- Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. D'après le résultat du cours, (S_n) converge aussi vers ℓ .

Correction de l'exercice 4 :

- f est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par opérations.
 - $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
Donc f est prolongeable pqr continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
 - La fonction h est dérivable sur $]0, \pi/2[$ par opérations et pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $h'(x) = \sin(x) + x \cos(x) - \sin(x) = x \cos(x)$.
Or, pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $h'(x) > 0$, donc h est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$.
Comme $h(0) = 0$, h est strictement positive sur $]0, \pi/2[$.
 - f est dérivable sur $]0, \pi/2[$ par opérations et pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $f'(x) = \frac{x \sin(x) - 1 + \cos(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x} > 0$ d'après la question précédente. Donc f est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$.
 - Comme f est continue sur $]0, \pi/2[$ et strictement croissante sur cet intervalle, f réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur $f(]0, \pi/2[) =]0, \frac{2}{\pi}[$. Or $\pi < 4$, donc $\frac{2}{\pi} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}$ a un unique antécédent par f . Ainsi, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ a une unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : u_n est bien défini et $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
 - Initialisation : pour $n = 0$, l'énoncé donne $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
 - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est défini et $u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme f est définie sur $]0, \pi/2[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est défini. De plus, f est strictement croissante, donc $f(0) < f(u_n) < f(\pi/2)$, donc $u_{n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

D'après le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie et bornée.
 - Posons $g : x \mapsto f(x) - x = \frac{1 - \cos(x) - x^2}{x}$ et $v : x \mapsto 1 - \cos(x) - x^2$. La fonction v est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et pour tout $x \in]0, \pi/2[$, $v'(x) = \sin(x) - 2x \leq x - 2x = -x$. Donc v est strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$. Or $v(0) = 0$, donc v est strictement négative sur $]0, \pi/2[$ et nulle en 0, de même que g .
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$: (u_n) est décroissante.
 - Comme (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers une limite $\ell \in]0, \pi/2[$. Par continuité de f , $f(\ell) = \ell$, donc $g(\ell) = 0$. Mais g ne s'annule qu'en 0. Donc (u_n) converge vers 0.

Correction de l'exercice 5 :

- Soit $t \in \mathbb{K} : f_A(t) = \begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix} = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + ad - bc$. Ainsi, $\alpha = \text{tr}(A)$ et $\beta = \det(A)$.
- $A^2 - \alpha A + \beta I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Supposons que $\beta = \det(A) \neq 0$. Alors $I_2 = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)A - A^2) = A\left(\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A)\right)$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A)$.

4. Supposons que $\det(A) = 0$. Alors $A\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0$.

- Si A est la matrice nulle, n'importe quel X non nul convient.
- Sinon, au moins un des coefficients de A est non nul, donc au moins une des deux colonnes $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ convient.

5. (a) • Initialisation : pour $n = 0$, on pose $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ qui conviennent.
 • Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
 Alors $A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A = a_n(\alpha A - \beta I_2) + b_n A = (\alpha a_n + b_n)A - \beta a_n I_2$.
 On pose alors $a_{n+1} = \alpha a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\beta a_n$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + b_{n+1} = \alpha a_{n+1} - \beta a_n$ et $b_{n+2} = -\beta a_{n+1} = -\alpha \beta a_n - \beta b_n = \alpha b_{n+1} - \beta b_n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 0$ et $b_{n+2} - \alpha b_{n+1} + \beta b_n = 0$.

6. $A^2 M = (\alpha A - \beta I_2)M = \alpha AM - \beta M$ et $MA^2 = \alpha MA - \beta I_2$. Donc $\alpha AM = \alpha MA$ et comme $\alpha \neq 0$, $AM = MA$.

7. D'après la question 1, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_B(t) = t^2 - 5t + 6$. Donc les solutions de $f_B(t) = 0$ sont 2 et 3.

8. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $(B - 2I_2)X = 0 \iff \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ -2x - 3y = 0 \end{cases} \iff x = -\frac{3}{2}y$. Donc l'ensemble des solutions de (S_2) est

$$\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

$(B - 3I_2)X = 0 \iff \begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ -2x - 4y = 0 \end{cases} \iff x = -2y$. Donc l'ensemble des solutions de (S_3) est $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

9. On a $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut faire le pivot de Gauss, ou bien on utilise directement la formule pour les matrices

de taille 2 : $\det(P) = \frac{1}{2}$, donc P est inversible et $P^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

10. On a $P^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $D^n = P^{-1}B^nP$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $D^0 = I_2$ et $P^{-1}B^0P = P^{-1}I_2P = I_2$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $D^n = P^{-1}B^nP$.
 Alors $D^{n+1} = DD^n = P^{-1}BP P^{-1}B^nP = P^{-1}BB^nP = P^{-1}B^{n+1}P$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, D^n = P^{-1}B^nP$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, $B^n = PD^nP^{-1}$. Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Après calcul,

$$B^n = \begin{pmatrix} -3 \times 2^n + 4 \times 3^n & -3 \times 2^{n+1} + 2 \times 3^{n+1} \\ 2^{n+1} - 2 \times 3^n & 2^{n+2} - 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

13. D'après la question 5b, on a deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = a_n B + b_n I_2$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0$

L'équation caractéristique des suites a pour solutions 2 et 3. Donc il existe $C, D, E, F \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = C2^n + D3^n$ et $b_n = E2^n + F3^n$.

De plus, $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, donc $C + D = 0$ et $2C + 3D = 1$ ce qui donne $D = 1$ et $C = -1$.

Puis $b_0 = 1$ et $b_1 = 0$, donc $E + F = 1$ et $2E + 3F = 0$, ce qui donne $E = 3$ et $F = -2$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = (-2^n + 3^n)B + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)I_2$.

En remplaçant on retrouve le résultat de la question précédente.

14. Le discriminant de l'équation vaut $\alpha^2 - 4\beta$. Comme il est non nul, l'équation admet deux solutions distinctes.

15. Comme $\det(A - \lambda I_2) = 0$ et $\det(A - \mu I_2) = 0$, on applique simplement la question 4.

16. (a) Comme $(A - \lambda I_2)U_\lambda = 0$, on a $AU_\lambda = \lambda U_\lambda$.

(b) Les deux colonnes de AP sont λU_λ et μU_μ .

(c) Les deux colonnes de $P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ sont λU_λ et μU_μ . Donc $AP = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. La fonction f_n est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, $f'_n(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$		- 0 +	
$f_n(x)$	$+\infty$	$1-n$	$+\infty$

2. D'après la question précédente, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) > 0$. Donc (E_0) n'a pas de solution.

D'après la question précédente, $f_1(x) = 0 \iff x = 1$. La solution de (E_1) est 1.

3. Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, 1[$. D'après le TBM, f_n réalise une bijection de $]0, 1[$ sur $f(]0, 1[) =]1-n, +\infty[$. Comme $0 \in]1-n, +\infty[$, (E_n) a une unique solution dans $]0, 1[$.

4. (a) Soit $n \geq 2$. $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) = x_n - \ln(x_n) - (n+1) = n - (n+1) = -1$. Donc $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.

(b) Comme f_{n+1} est strictement décroissante sur $]0, 1[$ sa réciproque aussi, donc $x_n > x_{n+1}$: (x_n) est décroissante.

(c) La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

(d) Pour tout $n \geq 2$, $x_n - \ln(x_n) = n$. Or, $n \rightarrow +\infty$ et $x_n \rightarrow \ell$. Donc $\ln(x_n) \rightarrow -\infty$. Ainsi, $x_n \rightarrow 0$.

(e) Pour tout $n \geq 2$, $1 = e^{f_n(x_n)} = e^{x_n} \frac{e^{-n}}{x_n} \sim \frac{e^{-n}}{x_n}$. Donc $e^{-n} \sim x_n$.

(f) i. Soit $n \geq 2$: $\ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) = \ln(e^{-n} + \alpha_n) + n = \ln(x_n) + n$, donc $\ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) = x_n$.

ii. Par continuité de l'exponentielle, comme $x_n \rightarrow 0$, $\frac{\alpha_n}{e^{-n}} \rightarrow 0$.

iii. D'après les questions précédentes, $\ln\left(1 + \frac{\alpha_n}{e^{-n}}\right) \sim \frac{\alpha_n}{e^{-n}}$. Donc $x_n \sim \frac{\alpha_n}{e^{-n}}$, donc $\alpha_n \sim x_n e^{-n} = e^{-2n}$.

5. (a) Pour tout $n \geq 2$, $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} > 0$. Donc (S_n) est croissante.

(b) Comme $\frac{x_n}{e^{-n}} \rightarrow 1$, $\frac{x_n}{e^{-n}} - \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} < 0$. Donc il existe $N \geq 2$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{x_n}{e^{-n}} - \frac{3}{2} \leq 0$, c'est-à-dire $x_n \leq \frac{3}{2} e^{-n}$.

(c) Pour tout $n \geq N$, $S_n = \sum_{k=2}^N x_k + \sum_{k=N+1}^n x_k \leq \sum_{k=2}^N x_k + \sum_{k=N+1}^n \frac{3}{2} e^{-k}$.

Posons $M = \sum_{k=2}^N x_k$. On a de plus, $\sum_{k=N+1}^n \frac{3}{2} e^{-k} = \frac{3}{2} e^{-(N+1)} \frac{1 - e^{-(n-N)}}{1 - e^{-1}} \leq \frac{3}{2} \frac{e^{-N-1}}{1 - e^{-1}} = M'$.

Donc pour tout $n \geq N$, $S_n \leq M + M'$. La suite (S_n) est croissante et majorée : (S_n) converge.