

Devoir Surveillé de Cours 6

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Vingt-neuf questions indépendantes).

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques bornées. Montrer que les suites $u + v$ et uv sont bornées.
2. (a) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Rappeler la définition de (u_n) converge vers ℓ .
(b) Soit (u_n) une suite numérique qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer que (u_n) est bornée.
(c) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n > 0$.
3. (a) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Rappeler la définition de $u_n \rightarrow -\infty$.
(b) Soient (u_n) et (M_n) deux suites réelles pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, u_n \leq M_n$ et $M_n \rightarrow -\infty$. Montrer que $u_n \rightarrow -\infty$.
4. Énoncer le théorème de la limite monotone.
5. (a) Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Rappeler les définitions de $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
(b) Pour tout $n \geq 2$, on pose $u_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et $v_n = -\ln(n) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
(c) En déduire un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
6. Déterminer la limite de $u_n = n(2 + \cos(n))$.
7. Déterminer un équivalent simple des suites ci-dessous :

(a) $u_n = \frac{n - \sqrt{n^4 + 1}}{\ln(n) - \sqrt{n}}$	(c) $u_n = \frac{n+1}{n! + 5^n}$
(b) $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n}$	(d) $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$
8. (a) Donner la définition de combinaison linéaire de matrices.
(b) Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Rappeler la définition de $\text{Vect}(A_1, \dots, A_k)$.
9. Rappeler la définition de matrice nilpotente.
10. Énoncer la formule du binôme de Newton pour des matrices.
11. Rappeler la définition de matrice inversible.
12. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit inversible.
13. (a) Rappeler la définition du produit matriciel de deux matrices :
 - avec la formule donnant le terme en position (i, j) ;
 - avec un dessin.
 On précisera bien les tailles des matrices.
(b) Soient $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ et $(k, l) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ et soient $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.
14. Montrer que toute matrice carrée s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$.
16. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer P^{-1} .
17. Calculer le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$.

18. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3 et en déduire que A est inversible. Déterminer son inverse.
19. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$ un réel. Donner la définition de $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow a$.
20. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ un réel. Donner la définition de f est continue en a .
21. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
22. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
23. Énoncer le théorème des bornes atteintes.
24. Énoncer le théorème de la bijection monotone.
25. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.
26. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré 3. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
27. Rappeler les 11 équivalents usuels.
28. Soit $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$.
- Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - Justifier que f est continue sur son ensemble de définition.
 - Prouver que f est prolongeable par continuité en 0.
29. Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de :
- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> $\frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$ $\frac{\tan(3x)}{e^x - 1}$ | <ol style="list-style-type: none"> $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$ |
|---|--|

Exercice 2 (Une droite).

Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(3, 4)$ et $(7, 15)$. On note D la droite (AB) .

Soit $f : x \mapsto \frac{11x^2 - 39x + 38}{4x - 8}$.

- Déterminer une équation de la droite D .
- Prouver que la droite D est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$. Préciser la position relative de D et $\mathcal{C}$.

Exercice 3 (Une puissance).

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = I_3 + B$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer B^n .
- En déduire A^n .

Exercice 4 (Une étude de suite).

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

On pose $f : x \mapsto \arctan(x)$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

- Étudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.
 - Dresser le tableau de variations de f .
 - Démontrer que (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 - Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- Déterminer l'ensemble des fonctions h continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\arctan(x))$.

Exercice 5 (Une matrice qui commute avec tout le monde).

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Déterminer les coefficients $[E_{k,l}M]_{ij}$ et $[ME_{k,l}]_{ij}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$.

Correction du Devoir Surveillé de Cours 6

Correction de l'exercice 1 :

1. Il existe $M, M' \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M + M'$ et $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M M'$.
Ainsi, $u + v$ et uv sont bornées.
2. (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.
(b) Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq 1$. Donc, $\forall n \geq N, |u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq |\ell| + 1$.
Posons alors $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$,
 - si $n < N$, alors $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, donc $|u_n| \leq M$;
 - si $n \geq N$, alors $|u_n| \leq |\ell| + 1 \leq M$.
 Ainsi, (u_n) est bornée.
(c) Soit $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$, donc $u_n - \ell \geq -\varepsilon$ et $u_n \geq \varepsilon > 0$.
Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N, u_n > 0$.
3. (a) $\forall A \in \mathbb{R}_-, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$.
(b) Soit $A \in \mathbb{R}_-$. Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N', M_n \leq A$. On pose $N'' = \max(N, N')$. Alors pour tout $n \geq N''$, $u_n \leq M_n$ et $M_n \leq A$, donc $u_n \leq A$. Ainsi, $u_n \rightarrow -\infty$.
4. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - Si (u_n) est croissante alors soit elle est majorée et alors elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$.
 - Si (u_n) est décroissante alors soit elle est minorée et alors elle converge, soit elle diverge vers $-\infty$.
5. (a)
 - On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) et on écrit $u_n = o(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.
 - On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on écrit $u_n = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
 - On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) et on écrit $u_n \sim v_n$ si $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$.
- (b)
 - Soit $n \geq 2 : u_{n+1} - u_n = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$. Or, pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$, donc pour $x = \frac{1}{n}, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (u_n) est croissante.
 - Soit $n \geq 2 : v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$. Mais, $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et (v_n) est décroissante.
 - $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.
 Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.
- (c) D'après le théorème sur les suites adjacentes, (u_n) et (v_n) convergent. En particulier, $v_n = o(\ln(n))$. Donc $H_n = \ln(n) + v_n \sim \ln(n)$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}, \cos(n) \geq -1$, donc $2 + \cos(n) \geq 1$ et $u_n \geq n$. Comme $n \rightarrow +\infty$, par minoration, $u_n \rightarrow +\infty$.
7. (a) Comme $\sqrt{n^4 + 1} \sim n^2, n - \sqrt{n^4 + 1} \sim -n^2$, et $u_n \sim n^{3/2}$.
(b) Comme $\frac{1}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
(c) Comme $5^n = o(n!)$, $u_n \sim \frac{1}{(n-1)!}$.
(d) $u_n = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \text{ et } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, donc $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

8. (a) Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire des matrices $A_1, \dots, A_k$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que $C = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k$.
- (b) $\text{Vect}(A_1, \dots, A_k) = \{\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$.
9. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que N est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$.
10. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}$: $(A+B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.
11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
12. Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice D est inversible ssi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \neq 0$.
13. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$: $[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj}$.
- (b) On peut faire un dessin pour montrer que $E_{i,j} E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.
14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Analyse : soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = A + S$. Alors $M^\top = A^\top + S^\top = -A + S$. Donc $2S = M + M^\top$ et $S = \frac{M + M^\top}{2}$, puis $A = \frac{M - M^\top}{2}$.
 - Synthèse : posons $S = \frac{M + M^\top}{2}$ et $A = \frac{M - M^\top}{2}$. On a alors $S + A = M$ et $S^\top = S$ donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A^\top = -A$, donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- M s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
15. On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:
- Initialisation : pour $k = 0$, on a $(PAP^{-1})^0 = I_n$ et $PA^0 P^{-1} = P I_n P^{-1} = P P^{-1} = I_n$, donc $(PAP^{-1})^0 = PA^0 P^{-1}$.
 - Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $(PAP^{-1})^k = PA^k P^{-1}$. Alors $(PAP^{-1})^{k+1} = (PAP^{-1})^k PAP^{-1} = PA^k P^{-1} PAP^{-1} = PA^{k+1} P^{-1}$.
- D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(PAP^{-1})^k = PA^k P^{-1}$.
16. On applique directement le pivot de Gauss :
- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
- Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
17. $\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - L_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{array} \right)$, donc le déterminant vaut 0.
18. $A^3 = -I_3$, donc $A(-A^2) = I_2$ et $A \in \text{GL}_3(\mathbb{K})$ et $A^{-1} = -A^2$.
19. $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha > 0 \mid \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$.
20. f est continue en a ssi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.
21. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
- $$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall (u_n) \in I^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow a \Rightarrow f(u_n) \rightarrow f(a)$$
22. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I . Soit $a < b$ deux éléments de I . Pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.
23. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction f est bornée et atteint ses bornes.
24. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle I . Si f est continue et strictement croissante sur I , alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

25. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ par opérations. De plus, $g(a) = f(a) - a \leq 0$ et $g(b) = f(b) - b \geq 0$. D'après le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$. Donc $f(c) = c$. Ainsi, f admet au moins un point fixe.

26. Notons a le coefficient dominant de f , de sorte que $f(x) \sim_x \pm \infty ax^3$. Si $a > 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$ donc f change de signe sur $\mathbb{R}$. De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations, donc d'après le TVI, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$. Si $a < 0$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \mp\infty$ et on conclut de même.

Dans les deux cas, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

- | | |
|--|---|
| <p>27. (a) Si $a_n \neq 0$, $a_n x^n + \dots + a_0 \sim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$;</p> <p>(b) si $a_p \neq 0$, $a_n x^n + \dots + a_p x^p \sim_{x \rightarrow 0} a_p x^p$;</p> <p>(c) $\sin(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$;</p> <p>(d) $\tan(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$;</p> <p>(e) $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$;</p> <p>(f) $e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x$;</p> | <p>(g) $\arctan(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$;</p> <p>(h) $\operatorname{sh}(x) \sim_{x \rightarrow 0} x$;</p> <p>(i) $(1+x)^\lambda - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \lambda x$ si $\lambda \neq 0$;</p> <p>(j) $1 - \cos(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$;</p> <p>(k) $\operatorname{ch}(x) - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2}$.</p> |
|--|---|

28. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est définie en x ssi $x+4 \geq 0$ et $\sqrt{x+4} - 2 \neq 0$. Ce qui donne $D_f =]-4, 0[\cup]0, +\infty[$.

(b) f est continue sur $] -4, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ par opérations.

(c) $\sqrt{x+4} - 2 = 2(\sqrt{1+x/4} - 1) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4}$ et $\sin(2x) \sim_{x \rightarrow 0} 2x$, donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} 8$. Ainsi, f admet une limite finie en 0. La fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 8$.

29. (a) $\frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$. Donc $\frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$.

(b) $\frac{\tan(3x)}{e^x - 1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$. Donc $\frac{\tan(3x)}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3$.

(c) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)}$, et $\frac{1}{x} \ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} 1$. Donc $(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

(d) Comme $\cos(2x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\cos(3x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} = \frac{\ln(1 + (\cos(2x) - 1))}{\ln(1 + (\cos(3x) - 1))} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\cos(3x) - 1} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{(2x)^2}{2}}{-\frac{(3x)^2}{2}} = \frac{4}{9}$. Donc $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 2 :

- La pente de D vaut $\frac{11}{4}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{11}{4}x + b$ est une équation de D . Comme $A \in B$, $4 = \frac{33}{4} + b$ donc $b = -\frac{17}{4}$. Ainsi, une équation de D est $y = \frac{11}{4}x - \frac{17}{4}$.
- $f(x) - \left(\frac{11}{4}x - \frac{17}{4}\right) = \frac{1}{x-2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc D est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$. De plus, pour tout $x > 2$, $\frac{1}{x-2} > 0$, donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de D au voisinage de $+\infty$.

Correction de l'exercice 3 :

- On remarque que $B^0 = I_3$, $B^1 = B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0_3$. Donc pour tout $n \geq 3$, $B^n = B^3 B^{n-3} = 0_3$.

- Comme $I_3 B = B I_3$, on peut appliquer Newton : $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}$.

Si $n \geq 2$, d'après la question précédente, $A^n = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note que cette formule marche encore pour $n = 0$ et $n = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4 :

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - 1 \leq 0$ car $x^2 + 1 \geq 1$. Donc

g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $g(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $g(x) \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $g(x) \leq 0$.

(b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

- (c) • Supposons que $x_0 \leq 0$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \leq 0$:
- ▷ Initialisation : par hypothèse, $u_0 = x_0 \leq 0$.
 - ▷ Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq 0$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(0) = 0$ car f est croissante sur $\mathbb{R}$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$. Or, pour tout $x \leq 0$, $g(x) \geq 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \geq 0$ et $f(u_n) - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Ainsi, si $x_0 \leq 0$, la suite (u_n) est croissante.

- Si $x_0 \geq 0$, on montre de même que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et comme g est négative sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Ainsi, si $x_0 \geq 0$, la suite (u_n) est décroissante.

- (d) • Si $x_0 \leq 0$, (u_n) est croissante et majorée par 0, donc converge.
• Si $x_0 \geq 0$, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge.

Dans les deux cas, (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, comme f est continue, $f(\ell) = \ell$. Or, comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ n'a que 0 comme solution. Donc $\ell = 0$.

Ainsi, $u_n \rightarrow 0$.

2. • Analyse : soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan(x))$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) comme dans l'énoncé. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(u_n) = h(f(u_n)) = h(u_{n+1})$: la suite $(h(u_n))$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x_0) = h(u_n)$ et comme h est continue sur $\mathbb{R}$ et que $u_n \rightarrow 0$, $h(x_0) = h(0)$. Ainsi, h est constante.
- Synthèse : soit $h : x \mapsto C$ une fonction constante. La fonction h est bien continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = C$ et $h(\arctan(x)) = C$.

Les seules fonctions qui conviennent sont les fonctions constantes.

Correction de l'exercice 5 :

1. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors $[E_{k,l}M]_{ij} = \sum_{m=1}^n [E_{k,l}]_{im} [M]_{mj}$.
- Si $k \neq i$, alors tous les termes sont nuls et $[E_{k,l}M]_{ij} = 0$
 - Si $i = k$, $[E_{k,l}M]_{kj} = [M]_{lj}$.
- Puis, $[ME_{k,l}]_{ij} = \sum_{m=1}^n [M]_{im} [E_{k,l}]_{mj}$.
- Si $l \neq j$, alors tous les termes sont nuls et $[ME_{k,l}]_{ij} = 0$
 - Si $j = l$, $[ME_{k,l}]_{il} = [M]_{ik}$.
2. • Analyse : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$. Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors $E_{k,l}M = ME_{k,l}$. D'après la question précédente, en prenant $k \neq l$, $[E_{k,l}M]_{ll} = 0$ et $[ME_{k,l}]_{ll} = [M]_{lk}$, donc tous les coefficients de M en dehors de la diagonale sont nuls. Puis, $[E_{k,l}M]_{kl} = [M]_{ll}$ et $[ME_{k,l}]_{kl} = [M]_{kk}$, donc tous les coefficients diagonaux de M sont égaux. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
- Synthèse : soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $M = \lambda I_n$. Alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$.

Ainsi, les matrices qui conviennent sont les matrices scalaires.