

Chapitre 19 : Développements limités

I. Théorie

I.1. Définitions

Définition I.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si $0 \in I$ (ou est une extrémité de I), on dit que f admet un **développement limité à l'ordre n** en 0 (noté $DL_n(0)$) s'il existe un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} P(x) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

2. Si $x_0 \in I$ (ou est une extrémité de I), on dit que f admet un **développement limité à l'ordre n** en x_0 (noté $DL_n(x_0)$) s'il existe un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} P(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Remarque I.1. On a vu dans le chapitre sur la dérivabilité que f est dérivable en x_0 ssi elle admet un $DL_1(x_0)$.

Proposition I.1. Si f admet un $DL_n(0)$ (resp. un $DL_n(x_0)$), alors il est unique.

Proposition I.2. Soit f une fonction qui admet un $DL_n(0) : f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$.

1. Si f est paire, alors $a_1 = a_3 = \dots = 0$.
2. Si f est impaire, alors $a_0 = a_2 = \dots = 0$.

Exemple I.1. Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$ définie sur $] -1, 1[$. D'après la formule de Bernoulli, $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + \dots + x^n)$, donc pour tout $x \in] -1, 1[$, $1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = f(x) - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$. Or $\frac{x^{n+1}}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$.

En remplaçant x par $-x$, on obtient $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Proposition I.3. Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ lorsque $x \rightarrow x_0$ et $k \leq n$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$. On peut **tronquer** un DL.

Remarque I.2. Attention, si on connaît un $DL_k(x_0)$, on ne peut pas en déduire un $DL_n(x_0)$. On ne connaît qu'une partie du $DL_n(x_0)$.

Théorème I.4

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$ et f' admet un $DL_n(x_0) : f'(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$, alors f admet un $DL_{n+1}(x_0)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + \dots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + o((x - x_0)^{n+1})$.

I.2. Développements de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ **Théorème I.5 (Formule de Taylor-Young)**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x - a)^n).$$

On peut maintenant appliquer Taylor-Young aux fonctions usuelles (qui sont toutes $\mathcal{C}^\infty$).

- $DL_n(0)$ de $x \mapsto e^x$: comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(0) = 1$,

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

- $DL_{2n+2}(0)$ de $\sin$: comme $\sin$ est impaire, et $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$,

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

- $DL_{2n+1}(0)$ de $\cos$: comme $\cos$ est paire, et $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$,

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

- $DL_n(0)$ de ch : comme ch est paire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{ch}^{(2n)}(0) = 1$,

$$\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

- $DL_n(0)$ de sh : comme sh est impaire et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{sh}^{(2n+1)}(0) = 1$,

$$\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

- $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$: on primitive le $DL_{n-1}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$:

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n).$$

- $DL_n(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$: on montre par récurrence que $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, donc

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

- $DL_{2n+2}(0)$ de arctan : on primitive le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$:

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

I.3. Développements limités et équivalents

Proposition I.6. Si f admet un $DL_n(x_0) : f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_p(x-x_0)^p + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$: f est équivalente au **terme prépondérant** de son DL.
En particulier, $f(x)$ est du signe de $a_p(x-x_0)^p$ au voisinage de x_0 .

Exemple I.2. Comme, $\sin(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a $\frac{\sin(x) - x}{\cos(x) - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{3}$.

II. Pratique

II.1. Changement de variable

Si on connaît un DL en 0, on peut parfois s'en servir pour en déduire un DL en x_0 ou en $\pm\infty$. On fait pour cela un changement de variable.

Exemples II.1. • $DL_{2n+2}(\pi/2)$ de $\cos x$.

- $DL_n(+\infty)$ de $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Plus généralement :

Proposition II.1. Soit

- f définie au voisinage de 0 telle que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$
- u définie au voisinage de a telle que $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$.

Alors $f(u(x)) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1u(x) + \dots + a_n(u(x))^n + o((u(x))^n)$.

Exemple II.2. Le $DL_2(0)$ de e^x est $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc on obtient $e^{\frac{x^2}{3}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o(x^4)$.

II.2. Somme

Proposition II.2. Si f et g admettent un $DL_n(0)$, alors $f + g$ admet un $DL_n(0)$ qu'on obtient en ajoutant les deux DL.

Exemple II.3. $DL_4(0)$ de $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \text{ et } \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \text{ donc } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

II.3. Produit

Proposition II.3. Si f et g admettent un $DL_n(0)$, alors fg admet un $DL_n(0)$ qu'on obtient en multipliant les deux DL et en supprimant les termes de degré $> n$.

Méthode. Si le terme prépondérant de f est d'ordre $p \leq n$, alors il suffit d'utiliser un DL_{n-p} de g .

Exemple II.4. $DL_4(0)$ de $f(x) = \ln(1+x) \sin x$.

II.4. Composition

Proposition II.4. Si f et g admettent un $DL_n(0)$ et si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, alors $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ obtenu en composant les DL.

Méthode. Pour obtenir un $DL_n(0)$ de $f \circ g$:

- on commence par vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$;
- on cherche un équivalent de $g(x)$ en 0;
- on pose $u = g(x)$ et on remplace x par u dans le DL de f puis u par son équivalent dans le o ;
- on calcule en remplaçant u par son DL et en éliminant dès que possible les termes de trop haut degré.

Exemple II.5. $DL_4(0)$ de $\cos(\sin x)$.

II.5. Quotient

Méthode. • Si $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, pour obtenir un $DL(0)$ de $\frac{1}{g(x)}$, on pose $u(x) = -(a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1-u} \\ &\underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n) \end{aligned}$$

puis on remplace u par son équivalent dans le o et par son expression et on développe/simplifie.

- Si $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$ avec $a_0 \neq 0$, on écrit $g(x) = a_0(1-u)$ en factorisant par a_0 puis on reprend comme ci-dessus.
- Si $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_dx^d + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, avec $a_d \neq 0$, on écrit $g(x) = a_dx^d(1-u)$ en factorisant par a_dx^d puis on reprend comme ci-dessus.
- Pour obtenir un $DL(0)$ de $\frac{f}{g}$, on développe d'abord $\frac{1}{g}$ puis on multiplie le résultat par le développement de f .

Exemple II.6. $DL_5(0)$ de $\tan(x)$.

II.6. Intégration

Exemple II.7. $DL_5(0)$ de $\arcsin(x)$: comme $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$, et $\arcsin(0) = 0$, on obtient $\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.

III. Applications

III.1. Calcul de limites

Si on ne peut pas ajouter les équivalents, on peut par contre ajouter les développements limités. Donc lorsque les équivalents ne suffisent pas, on utilise les développements limités.

Exemple III.1. Déterminer la limite lorsque $x \rightarrow 0$ de $\frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

III.2. Étude locale d'une fonction

Si f admet un $DL(a)$ de la forme $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$, alors :

- $\mathcal{C}_f$ admet une tangente $T : y = a_0 + a_1(x-a)$ en a ;
- la position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T est donnée par le signe de $a_p(x-a)^p$.
- Si p est impair, on dit que a est un point d'inflexion : la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse la tangente T car $(x-a)^p$ change de signe en a .
- Si p est pair, la courbe se situe au-dessus ou au-dessous de T , suivant le signe de a_p .

Exemples III.2. • Prenons $f(x) = \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 0 \times x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente T horizontale au point d'abscisse 0. De plus, comme $a_2 = -\frac{1}{2} < 0$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de T .

- Prenons $g(x) = \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc $\mathcal{C}_g$ admet la droite $T : y = x$ comme tangente en 0. De plus, 0 est un point d'inflexion et comme $g(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$, T est d'abord au-dessous de $\mathcal{C}_g$ puis au-dessus.

On peut aussi étudier les branches infinies des fonctions.

Exemple III.3. Prenons $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et étudions sa branche infinie en $+\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, la droite $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. De plus, comme $\frac{1}{3x} > 0$ lorsque $x > 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.