

Colles 21 - 16/03/2026 au 20/03/2026**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 17 : Dérivabilité.
Exercices traités en classe : I.1,2,3,4, II.1, 2, 6, 10, III.1,2, V.1,2
- Chapitre 18 : Polynômes.
 1. Polynômes à une indéterminée, degré.
 2. Opérations sur les polynômes.
 3. Dérivation formelle.
 4. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles.
 5. Formule de Taylor.
 6. Racines, multiplicité, lien avec la divisibilité.
 7. Nombre maximal de racines.
 8. Polynômes scindés, relations coefficients-racines.
 9. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
 10. Irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
 11. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples.**Exercices traités en classe :** I.1, I.3, II.2, II.4, III.1, III.3, III.4, III.7, III.8, IV.2, IV.3, IV.4, IV.7, IV.8, V.2.
- Chapitre 19 : Développements limités.
 1. Définition, unicité.
 2. DL d'une fonction paire/impair.
 3. Troncature, partie principale.
 4. Primitivation d'un DL.
 5. Formule de Taylor-Young.
 6. DL usuels.
 7. Méthodes de calcul.
 8. Applications : calculs de limites, étude de tangente/asymptote.**Pas d'exercices sur ce chapitre**

Questions de cours

Pour tout le monde : Déterminer une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples.

Question 1

- C17 Exercice V.2 : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a < c < b$ dans I . Montrer que si f est convexe sur I , alors $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$. En déduire que si f est convexe et dérivable sur I , alors f' est croissante sur I .
- Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes. Montrer l'unicité.
- Donner les formules pour le degré de la somme, du produit, de la composée de deux polynômes. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \llbracket 0, \deg(P) \rrbracket$, alors $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$, démonstration.
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1. Montrer que P est irréductible.
- C18 Exercice I.1 : soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant le coefficient du monôme de degré $2n$ de $P = (X^2 - 1)^{2n}$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$
- Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Calculer $((X - \alpha)^n)^{(p)}$. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes. Montrer la formule dans le cas $\alpha = 0$.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que α est racine de P ssi $X - \alpha | P$.
- Exemple du cours : soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes deux à deux distincts.
 1. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
 2. Soient $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = b_j$.
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis calcul de la somme et du produit des racines de l'unité en utilisant les relations coefficients-racines.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. α est racine de P ssi $\bar{\alpha}$ est racine de P . Puis, α est racine de multiplicité m de P ssi $\bar{\alpha}$ est racine de multiplicité m de P .
- Exemple du cours : factorisation de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- C18 Exercice III.7 : résoudre $Q(X) = Q(X+1)$ d'inconnue $Q \in \mathbb{C}[X]$ par analyse-synthèse.
- C18 Exercice IV.3 : soit $P = X^8 + 9X^7 + 23X^6 + 27X^5 + 63X^4 + 27X^3 + 61X^2 + 9X + 20$. Vérifier que i est racine de P puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- C18 Exercice IV.8 : on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
 1. Factoriser $\cos(nx) + \cos((n-2)x)$ et en déduire une relation entre T_n, T_{n-1} et T_{n-2} .
 2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .
- Développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n , avec la démonstration.
- Énoncer la formule de Taylor-Young avec ses hypothèses. Retrouver le DL de $x \mapsto e^x$ en 0.
- Déterminer le $DL_5(0)$ de $\tan$: à partir de $\frac{\sin}{\cos}$ puis en primitivant le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\cos^2(x)}$.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1.
 - ▷ Extremum local et dérivée.
 - ▷ Théorème de Rolle.
 - ▷ Théorème des accroissements finis.
 - ▷ Monotonie et dérivée.
 - ▷ Limite de la dérivée.
 - ▷ Inégalité des accroissements finis.
 - ▷ Formule de Leibniz.
 - ▷ Fonction convexe et position des sécantes/tangentes.
 - ▷ Caractérisation de la convexité pour les fonctions deux fois dérivables.
 - ▷ Degré et opérations sur les polynômes.
 - ▷ Degré et dérivation formelle.
 - ▷ Divisibilité et degré.
 - ▷ Théorème de la division euclidienne.
 - ▷ Factorisation en facteurs irréductibles unitaires.
 - ▷ Formule de Taylor pour les polynômes.
 - ▷ Caractérisation de la multiplicité d'une racine avec les dérivées successives.
 - ▷ Théorème sur les racines d'un polynôme et divisibilité.
 - ▷ Nombre maximal de racines.
 - ▷ Relations coefficients racines.
 - ▷ Théorème de d'Alembert-Gauss.
 - ▷ Racines complexes d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
 - ▷ Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
 - ▷ Décomposition en éléments simples pour un dénominateur scindé à racines simples.
 - ▷ $DL(0)$ et parité.
 - ▷ Théorème de primitivation des DL .
 - ▷ Formule de Taylor-Young.
 - ▷ Développements limités usuels.

A savoir faire

1. Savoir prouver la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle/en un point.
2. Savoir appliquer Rolle, le TAF et l'IAF.
3. Savoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée pour vérifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Savoir appliquer la formule de Leibniz.
5. Savoir appliquer la convexité/concavité pour démontrer des inégalités.
6. Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
7. Savoir poser la division euclidienne de deux polynômes.
8. Savoir utiliser une racine évidente et sa multiplicité pour factoriser un polynôme.
9. Savoir montrer qu'un polynôme divise un autre en étudiant les racines et leurs multiplicités.
10. Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
11. Savoir faire une décomposition en éléments simples pour déterminer une primitive, calculer une dérivée, une somme, etc...