

Polynômes - Exercices

I. Généralités

Exercice I.1. On donne le polynôme $P = (X^2 - 1)^{2n}$.

1. Donner le coefficient du monôme de degré $2n$ de P .
2. Si $A = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ et $B = b_0 + b_1X + \dots + b_pX^p$, quel est le coefficient du monôme de degré p de $A \times B$?
3. On pose $A = (X - 1)^{2n}$ et $B = (X + 1)^{2n}$. En remarquant que $P = A \times B$, en déduire un autre calcul du coefficient du monôme de degré $2n$ de P .
4. Déduire des questions précédentes la relation :
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$

Exercice I.2. Soit $P_n(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \dots (1 + X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

Exercice I.3.

1. On souhaite résoudre l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - (a) Soit P une solution et n son degré. Calculer n .
 - (b) En déduire les solutions de l'équation.
2. En procédant de la même façon, déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

II. Division euclidienne

Exercice II.1. Dans chaque cas, effectuer la division euclidienne de A par B :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $A = X^3 + 2X^2 + X - 1$ et $B = X - 2$ 2. $A = X^4 + X^3 - X + 5$ et $B = X^2 + 1$ 3. $A = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + X^2$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2$ et $B = X^2 + (1 - i)X + 1 + i$. |
|--|---|

Exercice II.2.

1. Déterminer a et b pour que $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + b$.
2. Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice II.3.

1. Montrer que $(X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ est divisible par $X(X + 1)(2X + 1)$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ par $X^2 - 1$.
3. On pose $P = X^{n+1} - 2X^n + X + 1$ et $B = (X - 1)(X - 2)$.
 - (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par B .
 - (b) Déterminer le quotient de cette division euclidienne.

Exercice II.4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)$ est 6, et que le reste de la division de P par $(X - 2)$ est 8. Quel est le reste de la division par $(X - 1)(X - 2)$?
2. *Généralisation.* Si $a \neq b$, donner le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice II.5. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

III. Racines

Exercice III.1.

1. Montrer très simplement que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.
2. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $(X+1)^n - nX - 1$ par X^2 .

Exercice III.2. On considère le polynôme $P = X^6 - X^5 - 2X^4 - X^3 + X^2 + 2X - 1$. On souhaite calculer $P(1 + \sqrt{2})$.

1. Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont $1 + \sqrt{2}$ est racine.
2. En déduire une manière simple de calculer $P(1 + \sqrt{2})$.

Exercice III.3. Démontrer que les polynômes suivants n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$:

- a) $1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$ b) $1 - X + X^n$ (avec $n \geq 2$)

Exercice III.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $P = (X-2)^n - (2X-3)^n + \lambda(X^n - 1)$.

Trouver l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels P admet 1 comme racine au moins double. Déterminer alors l'ordre de multiplicité de cette racine.

Exercice III.5. Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0_2$.
2. Soit $n \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. Calculer M^n pour tout $n > 0$.

Exercice III.6. Soient a, b et c trois réels deux à deux distincts. Montrer, sans développer, que le polynôme

$$P = (b-c)(X-a)^2 + (c-a)(X-b)^2 + (a-b)(X-c)^2 + (a-b)(b-c)(c-a)$$

est le polynôme nul.

Exercice III.7. 1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X) = Q(X+1)$.

- (a) Si α est une racine de Q , que dire de $\alpha + 1$?
- (b) En déduire que Q est constant.

2. On souhaite déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

- (a) Soit P un tel polynôme. Montrer que 0 est racine de P .
- (b) En déduire trois autres racines de P .
- (c) Montrer que P peut s'écrire $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice III.8. 1. Soit $P = (X-2)(X-1)(X+1)(X+2)$. Montrer que P' a trois racines distinctes qui sont toutes réelles.

2. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ dans un intervalle $]a, b[$.

- (a) Montrer que P' a $n-1$ racines réelles distinctes dans l'intervalle $]a, b[$.
- (b) Montrer par l'absurde que P ne peut pas avoir deux coefficients consécutifs nuls.

3. On suppose maintenant que P a k racines réelles distinctes $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ de multiplicités $m_1, m_2, \dots, m_k$.

Montrer que P' a au moins $m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1$ racines réelles comptées avec multiplicités.

4. Soient p et q deux réels. On pose $P = X^6 + pX + q$ et $Q = X^5 + pX + q$.

Montrer que P ne peut pas avoir plus de deux racines réelles distinctes et Q ne peut pas avoir plus de trois racines réelles distinctes.

5. Montrer que le polynôme $P = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ est de degré n et a n racines réelles distinctes strictement comprises entre -1 et 1 .

IV. Factorisations

Exercice IV.1.

1. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Factoriser $X^3 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. En déduire la relation (à retenir) : $1 + j + j^2 = 0$.
2. Soit $n \geq 2$ et $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

(a) Utiliser une méthode semblable à celle de la question 1 pour montrer que :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0$$

(b) Montrer aussi que $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi^k) = n$.

(c) Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, calculer $|1 - \xi^k|$.

(d) En déduire que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

3. Soit $n \geq 0$. Factoriser le polynôme $X^{2n+1} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis en déduire que $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

Exercice IV.2. Factoriser en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$:

- | | | |
|--------------|----------------------------------|--------------------------|
| 1. $X^5 - 1$ | 3. $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$ | 5. $X^3 - X^2 - 8X + 12$ |
| 2. $X^6 + 1$ | 4. $X^3 - 2X^2 + 2X - 1$ | 6. $X^6 - X^3 + 1$. |

Exercice IV.3. Soit $P = X^8 + 9X^7 + 23X^6 + 27X^5 + 63X^4 + 27X^3 + 61X^2 + 9X + 20$. Vérifier que i est racine de P , puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice IV.4. Soit $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Sachant que la somme de deux des racines de P est égale à la troisième, factoriser P .

Exercice IV.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0, \pi[$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n} - 2\cos(\alpha)X^n + 1$.

Exercice IV.6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Exercice IV.7. Soit $P = X^3 - X + 1$.

1. Justifier que P a trois racines simples que l'on notera a , b et c .
2. Déterminer la valeur de $ab + ac + bc$.
3. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$.
4. En déduire $a^7 + b^7 + c^7$.

Exercice IV.8. [Polynômes de Tchebychev]

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)$$

2. Factoriser $\cos(nx) + \cos((n-2)x)$ et en déduire une relation entre T_n , T_{n-1} et T_{n-2} .
3. Calculer T_0 , T_1 , T_2 et T_3 .
4. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .
5. Trouver les racines de T_n qui sont dans $[-1, 1]$.
6. Factoriser T_n .
7. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

V. Décompositions en éléments simples

Exercice V.1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire scindé à racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Exprimer $P'(\alpha_k)$ en fonction des autres racines de P .
2. En déduire l'expression des coefficients de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ à l'aide de P' .

Exercice V.2. 1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

- (a) $\frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$
- (b) $\frac{2X^5 - 11X^4 + 13X^3 + 17X^2 - 39X - 18}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}$
- (c) $\frac{n!}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

- (a) $\frac{1}{X(X^2 + 1)}$ | (b) $\frac{1}{X(X^n - 1)}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

3. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 3}{X^3 + X^2 - X - 1}$ sous la forme $P + \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{(X+1)^2}$.

4. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X^2 + 1)}$ sous la forme $P + \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + 1}$.

Exercice V.3. 1. Soit $n \geq 2$ un entier. Simplifier les sommes :

- (a) $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ | (b) $R_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3 - k + 1}{k^3 - k}$ | (c) $T_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{(k^2 - 1)(k^2 - 4)}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^3 - 2x + x - 4}{x^2 - x - 2} dx$.

Exercice V.4. 1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

2. Soit $n \geq 2$. En déduire la valeur de $\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1 - \omega}$.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. $P = (X^2 - 1)(X^2 - 1) \dots (X^2 - 1)$. Pour obtenir un monôme de degré $2n$, on doit choisir n parenthèses parmi les $2n$ dans lesquelles on prend le terme X^2 , puis on prend le terme -1 dans les n autres. Ainsi, chaque monôme vaut $(-1)^n X^{2n}$ et il y en a $\binom{2n}{n}$. Le coefficient total vaut $(-1)^n \binom{2n}{n}$.
2. Pour obtenir un monôme de degré p dans AB , on doit prendre un monôme de degré k dans A et le monôme de degré $p - k$ dans B . Donc le coefficient vaut $\sum_{k=0}^p a_k b_{p-k}$.
3. $A = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k} X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$, donc $a_k = \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k}$ et $b_k = \binom{2n}{k}$, puis on utilise la formule précédente.
4. On remarque simplement que $(-1)^{2n-k} = (-1)^k$.

Exercice I.2 : Commencer par tester pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. On peut alors conjecturer puis démontrer par récurrence une formule pour le polynôme développé.

Autre façon de voir : lorsqu'on développe, chaque monôme s'écrit $X^{\varepsilon_0 2^0 + \varepsilon_1 2^1 + \dots + \varepsilon_n 2^n}$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. La puissance est l'écriture en binaire d'un nombre entier. Comme cette écriture est unique et qu'on obtient tous les nombres entiers de 0 à 2^n lorsque les ε_i varient, on retrouve la même formule que précédemment.

Exercice I.3 :

1. (a) On a $2n = 2 + n$, donc $n = 2$.
(b) P s'écrit $aX^2 + bX + c$. On remplace dans l'équation puis on identifie. On trouve $S = \{\lambda(X^2 - 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
2. On trouve $S = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{X\}$.

Exercice II.1 :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1. $Q = X^2 + 4X + 9$ et $R = 17$ | 3. $Q = X$ et $R = X^2 + X + 1$ |
| 2. $Q = X^2 + X - 1$ et $R = -2X + 6$ | 4. $Q = X^2 + (1 + i)X + 1 - i$ et $R = 0$ |

Exercice II.2 :

1. Il faut que $a^3 - 2a - 1 = 0$ et $b = a^2 - 1$. Pour la première équation, on trouve une solution évidente $a = -1$, puis $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On trouve les valeurs de b correspondant : $b = 0$, $b = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$.
2. On trouve $\mu - 1 = 0$ et $-\lambda + 3 = 0$.

Exercice II.3 :

1. On remarque que 0 , -1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines du polynôme.
2. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = X^2 - 1$. Le reste R est de degré au plus 1, donc $R = aX + b$, et $A = BQ + R$. On calcule pour 1 et -1 , on trouve $a + b = 0$ et $-a + b = \frac{-2n(-1)^n + (-1)^{n+1} + 1}{2}$, donc $b = \frac{-2n(-1)^n + (-1)^{n+1} + 1}{2}$ et $a = -b$.
3. (a) On trouve $R = 2X - 1$.
(b) On a $(X - 1)(X - 1)Q = X^{n+1} - 2X^n - X + 2$. On écrit $Q = a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_0$, puis on développe $(X - 1)(X - 2)Q$. On trouve que pour $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$, $2a_k - 3a_{k-1} + a_{k-2} = 0$, et aussi $a_0 = 1$, $2a_1 - 3a_0 = -1$, donc $a_1 = 1$. On montre alors par récurrence que $a_k = 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

Exercice II.4 :

1. On a $R(1) = 6$ et $R(2) = 8$, avec $\deg R \leq 1$. On trouve donc $R = 2X + 4$.
2. On a $R = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}X + \frac{bP(a) - aP(b)}{b - a}$.

Exercice II.5 : $(\cos \theta + X \sin \theta)^n = (X^2 + 1)Q + R$, puis en prenant les fonctions polynomiales associées pour les valeurs i et $-i$, on trouve $R(i) = e^{in\theta}$ et $R(-i) = e^{-in\theta}$. Donc $R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Exercice III.1 :

1. Il suffit de montrer que 0 est racine double du polynôme.
2. On développe $(X+1)^n - nX - 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - nX - 1 = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} X^{k+2} = X^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} X^k$.

Exercice III.2 :

1. On pose $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. Alors $\alpha^2 = 3 + 2\sqrt{2} = 3 + 2(\alpha - 1)$. Donc α est racine de $X^2 - 2X - 1$.
2. On calcule le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 2X - 1$: $P = (X^2 - 2X - 1)Q + 16X + 5$. En remplaçant X par $1 + \sqrt{2}$, on trouve $P(1 + \sqrt{2}) = 16(1 + \sqrt{2}) + 5 = 21 + 16\sqrt{2}$.

Exercice III.3 :

- a) Supposons par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine double du polynôme. Alors, $1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} = 0$ et $1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} = 0$. En soustrayant les deux, on obtient $\alpha = 0$. Or 0 n'est évidemment pas racine!
- b) On procède de même. On trouve que $\alpha = \frac{n}{n-1}$. Or, ce n'est pas une racine du polynôme dérivé.

Exercice III.4 : On remarque que 1 est racine de P . En calculant $P'(1)$, on trouve que $\lambda = (-1)^{n-1}$. On trouve alors que $P''(1) \neq 0$, donc 1 est racine double.

Exercice III.5 :

1. On pose l'opération facilement.
2. Comme $X^2 - 3X + 2$ est de degré 2, le reste est de degré au maximum 1. Il s'écrit $aX + b$: $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + aX + b$. On remplace X par 1 puis par 2 (racines de $X^2 - 3X + 2$) et on trouve $a + b = 1$ et $2a + b = 2^n$, donc $a = 2^n - 1$ et $b = 2 - 2^n$.
3. On remplace X par M dans la division euclidienne précédente : $M^n = (M^2 - 3M + 2I_2)Q(M) + (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_2 = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_2$.

Exercice III.6 : On calcule $P(a) = (c-a)(a-b)^2 + (a-b)(a-c)^2 + (a-b)(b-c)(c-a) = (c-a)(a-b)(a-b+c-c+a+b-c) = 0$ et de même $P(b) = P(c) = 0$. Or le polynôme P est de degré au maximum 2 et a trois racines distinctes. C'est le polynôme nul.

Exercice III.7 :

1. (a) $\alpha + 1$ est aussi racine de Q .
(b) Si Q n'est pas constant, alors il a une racine α . Puis il a une infinité de racine $\alpha + n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Donc il est nul!
2. (a) On remplace X par 0 : $4P(0) = 0$, donc $P(0) = 0$.
(b) On remplace X par -1 : $3P(-1) = -P(0) = 0$, puis de même avec -2 et -3 .
(c) Comme $0, -1, -2$ et -3 sont racines de P , on a $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$. On remplace dans l'équation et on trouve que $Q(X) = Q(X+1)$, donc Q est constant.

Exercice III.8 :

1. P s'annule en 2, 1, -1 et -2 . On applique Rolle sur les intervalles $[-2, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 2]$ pour trouver trois racines de P' .
2. (a) Même chose qu'à la question précédente en prenant les $n-1$ intervalles $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_n, x_{n-1}]$.
(b) On peut montrer par récurrence sur k que $P^{(k)}$ est de degré $n-k$ et a $n-k$ racines distinctes. Supposons par l'absurde que P a deux coefficients consécutifs nuls, ceux de degré k et $k+1$. Alors 0 est racine de $P^{(k)}$ et $P^{(k+1)}$, donc c'est une racine double de $P^{(k)}$. Ceci est une contradiction.
3. P' a déjà $k-1$ racines réelles distinctes $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$ en appliquant Rolle. De plus, chacun des x_i est racine de P' avec multiplicité $m_{i-1} - 1$. Donc en tout, on a $(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_k - 1) + k - 1 = m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1$ racines de P' .

- Supposons par l'absurde que P a trois racines réelles distinctes. Alors P' a au moins deux racines réelles distinctes. Or $P' = 6X^5 + p$ qui n'a qu'une seule racine réelle $-\left(\frac{p}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$.
Supposons par l'absurde que Q a 4 racines réelles distinctes. Alors Q' a au moins trois racines réelles distinctes. Or $Q' = 5X^4 + p$ a au plus 2 racines réelles distinctes (si $p < 0$).
- Posons $Q = (X^2 - 1)^n$. $\deg(Q) = 2n$, donc $\deg(P) = \deg(Q) - n = n$. On montre par récurrence sur $k \geq 1$ que $Q^{(k)}$ a k racines réelles distinctes strictement comprises entre -1 et 1 .

Exercice IV.1 :

- Les racines de $X^3 - 1$ sont les racines cubiques de l'unité : j^0, j^1 et j^2 . Donc $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. En évaluant pour j , on trouve $0 = (j - 1)(j^2 + j + 1)$.
- (a) Les racines de $X^n - 1$ sont $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{n-1}$. Donc $X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi^k) = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1)$.
(b) On a $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \frac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \xi^k)$. En évaluant en 1, on trouve l'égalité voulue.
(c) $1 - \xi^k = 1 - e^{2ik\pi/n} = e^{ik\pi/n}(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}) = -2i \sin(k\pi/n) e^{ik\pi/n}$ (angle moitié!). Donc $|1 - \xi^k| = 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ car $\frac{k\pi}{n} \in [0, \pi]$ et le sinus est positif.
(d) On a $\left| \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \xi^k) \right| = n$, et d'autre part, $\prod_{k=1}^{n-1} |1 - \xi^k| = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. On trouve bien l'égalité voulue.
- On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{2n+1}}$. On a $X^{2n+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2n} (X - \omega^k) = (X - 1) \prod_{k=1}^n (X - \omega^k)(X - \overline{\omega^k}) = (X - 1) \prod_{k=1}^n (X^2 - 2 \cos(2k\pi/n)X + 1)$. On évalue en i , et on identifie les parties réelles pour trouver l'égalité demandée.

Exercice IV.2 :

- $X^5 - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^4 (X - \xi^k)$, avec $\xi = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. On regroupe les termes par conjugués : $\bar{\xi} = \xi^4$ et $\bar{\xi}^2 = \xi^3$,
donc $X^5 - 1 = (X - 1)(X^2 - (\xi + \xi^4)X + \xi^5)(X^2 - (\xi^2 + \xi^3)X + \xi^5) = (X - 1)(X^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} X + 1)(X^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} X + 1)$.
- $X^6 + 1 = (X - i)(X + i) \left(X - \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right) \left(X - \frac{-\sqrt{3} + i}{2}\right) \left(X - \frac{-\sqrt{3} - i}{2}\right) = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$
- $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2 = (X^2 - X + 2 - i(X - 2))(X^2 - X + 2 + i(X - 2)) = (X - 2i)(X - 1 + i)(X + 2i)(X - 1 - i) = (X^2 + 4)(X^2 - 2X + 2)$.
- $X^3 - 2X^2 + 2X - 1 = (X - 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X - (1 + i\sqrt{3})/2)(X - (1 - i\sqrt{3})/2)$.
- $X^3 - X^2 - 8X + 12 = (X - 2)^2(X + 3)$.
- $X^6 - X^3 + 1 = (X^3 - e^{i\pi/3})(X^3 - e^{-i\pi/3}) = \prod_{k=0}^2 (X - e^{i\pi/9 + 2ik\pi/3})(X - e^{-i\pi/9 - 2ik\pi/3}) = \prod_{k=0}^1 (X^2 - 2 \cos(\pi/9 - 2k\pi/3)X + 1)$.

Exercice IV.4 : On vérifie que i est racine triple de P ! Comme $P \in \mathbb{R}[X]$, $-i$ aussi. Donc $(X^2 + 1)^3 = X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ divise P : le quotient vaut $(X + 4)(X + 5)$. Donc $P = (X^2 + 1)^3(X + 4)(X + 5)$. **Exercice IV.4 :** On note a, b, c les trois racines de sorte que $a + b = c$. Alors $a + b + c = -8$, donc $c = -4$. Puis on finit la factorisation : $P = (X - 4)(X - 2 + i\sqrt{3})(X - 2 - i\sqrt{3})$.

Exercice IV.5 : On factorise $X^2 - 2 \cos(\alpha)X + 1$: on a deux racines $e^{\pm i\alpha}$, donc $X^2 - 2 \cos(\alpha)X + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$.

Puis, $X^{2n} - 2 \cos(\alpha)X^n + 1 = (X^n - e^{i\alpha})(X^n - e^{-i\alpha}) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\alpha/n + 2ik\pi/n}\right) \left(X - e^{-i\alpha/n - 2ik\pi/n}\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)X + 1\right)$

Exercice IV.6 : On procède par double implication :

V. Décompositions en éléments simples

- $\Rightarrow$: Supposons que P est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k)$. Or si $w \in \mathbb{C}$ alors $|w| \geq |\operatorname{Im}(w)|$, donc $|P(z)| = \prod_{k=1}^n |z - \alpha_k| \geq \prod_{k=1}^n |\operatorname{Im}(z - \alpha_k)| = |\operatorname{Im}(z)|^n$.
- $\Leftarrow$: On raisonne par contraposée. Supposons que P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Alors P admet une racine complexe $z \in \mathbb{C}$ telle que $z \notin \mathbb{R}$. Donc $|P(z)| = 0 < |\operatorname{Im}(z)|^n$. On conclut par contraposée.

Exercice IV.7 :

1. On peut soit faire une étude de fonction, soit on calcule $P' = 3X^2 - 1$ dont les racines sont $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. On vérifie ensuite que ces deux réels ne sont pas racines de P .
2. On a $P = (X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + ac + bc)X - abc$. Donc $ab + ac + bc = -1$ par identification.
3. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$. Or $a + b + c = 0$, d'où $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.
4. On a $a^3 - a + 1 = 0$, donc $a^3 = a - 1$. Ainsi, $a^7 = a^3 a^3 a = (a - 1)^2 a = a^3 - 2a^2 + a = -2a^2 + 2a - 1$. De même avec b et c . Donc $a^7 + b^7 + c^7 = -2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c) - 3 = -7$.

Exercice IV.8 :

1.
 - Existence : $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (i \sin x)^k\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k \cos^{n-2k} x \sin^{2k} x$. Le polynôme $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} X^{n-2k} (1 - X^2)^k$ convient.
 - Unicité : Si T_n et U_n conviennent, alors leurs fonctions polynomiales sont égales sur $[-1, 1]$, car $\cos$ est surjective sur $[-1, 1]$. Or deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux.
2. $\cos(nx) + \cos((n-2)x) = 2 \cos((n-1)x) \cos x$. Ainsi, $T_n(\cos(x)) + T_{n-2}(\cos(x)) = 2 \cos(x) T_{n-1}(\cos(x))$. Ainsi les fonctions polynomiales associées à $T_n + T_{n-2}$ et $2X T_{n-1}$ sont égales sur $[-1, 1]$. On a donc $T_n + T_{n-2} = 2X T_{n-1}$.
3. $T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = 2X T_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2X T_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$.
4. Par récurrence, on montre que pour $n \geq 1$, $\deg T_n = n$ et que son coefficient dominant est 2^{n-1} .
5. $\cos nx = 0 \iff x = \frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$. Donc $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ sont des racines de T_n dans $[-1, 1]$. Comme elles sont toutes distinctes et que $T_n \neq 0$, ce sont les seules.
6. $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$.
7. $\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} T_n(0) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ si n est impair, $= -\frac{1}{2^{n-1}}$ si n est pair mais n'est pas divisible par 4, $= \frac{1}{2^{n-1}}$ si n est divisible par 4.

Exercice V.1 :

1. On a $P' = \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (X - \alpha_j)$, donc $P'(\alpha_k) = \prod_{j \neq k} (\alpha_k - \alpha_j)$.
2. On trouve $\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - \alpha_k}$ avec $a_k = \frac{1}{P'(\alpha_k)}$.

Exercice V.2 :

1. (a) $\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{5}{X-3} - \frac{5}{X-2} + \frac{1}{X-1}$
 (b) $\frac{2X^5 - 11X^4 + 13X^3 + 17X^2 - 39X - 18}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6} = 2X^2 + X - 3 - \frac{18}{X-3} + \frac{36}{X-2} - \frac{18}{X-1}$
 (c) $\frac{n!}{X(X+1)(X+2) \cdots (X+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{X+k}$.

2. (a) $\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2(X+i)} - \frac{1}{2(X-i)}$
- (b) $\frac{1}{X(X^n-1)} = \frac{-1}{X} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1/n}{X^k - e^{2ik\pi/n}}$, en utilisant l'exercice V.1.
3. $\frac{X^4+2X^3+X^2-X-3}{X^3+X^2-X-1} = X+1 + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}$.
4. $\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{X}{X^2+1}$.

Exercice V.3 :

1. (a) $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
- (b) $R_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3-k+1}{k^3-k} = n + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} - \frac{3}{4}$
- (c) $T_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^2}{(k^2-1)(k^2-4)} = \frac{5}{9} - \frac{1}{3(n-1)} - \frac{1}{6n} - \frac{1}{6(n+1)} - \frac{1}{3(n+2)}$.
2. $\int_0^1 \frac{x^3-2x+x-4}{x^2-x-2} dx = \frac{2}{3} \ln(2) + \frac{3}{2}$.

Exercice V.4 :

1. En notant $P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$, on a $P' = \lambda \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (X - \alpha_j)$. Donc $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - \alpha_k}$.
2. On prend le polynôme $P = 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} = \frac{X^n-1}{X-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n})$. Alors $\frac{P'(1)}{P(1)} = \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1-\omega}$.
- Or $P(1) = n$ et $P' = 1 + 2X + 3X^2 + \dots + (n-1)X^{n-2}$, donc $P'(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$. D'où $\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_n \\ \omega \neq 1}} \frac{1}{1-\omega} = \frac{2}{n-1}$.