

Développements limités - Exercices

Exercice 1. Déterminer les développements limités suivants :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $DL_4(0)$ de $x \cos(x) - e^x$
2. $DL_2(0)$ de $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
3. $DL_4(0)$ de $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4. $DL_3(0)$ de $\frac{e^{4x} - 1}{x}$
5. $DL_3\left(\frac{\pi}{6}\right)$ de $\cos(x)$
6. $DL_3(1)$ de $\sqrt{1+x}$ | 7. $DL_4(0)$ de $x e^x \ln(1+x)$
8. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x}}$
9. $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+\sin(x)}$
10. $DL_4(0)$ de $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
11. $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
12. $DL_4(0)$ de $\ln(1+x^3+x^6)$
13. $DL_5(0)$ de $\sqrt{\cos(x)}$ | 14. $DL_4(0)$ de $\ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right)$
15. $DL_4(0)$ de $\arctan\left(\frac{2(1-x)}{1+4x}\right)$
16. $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
17. $DL_2(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{x+e^x}$
18. $DL_2(1)$ de $\frac{x^2-1}{e^x-e}$ |
|---|---|---|

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ | 2. $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ | 3. $\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ |
|---|--|---|

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\arctan x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\tan x - x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{x\sqrt{x} - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ |
|--|--|--|

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a .

- On suppose que f est dérivable en a . Déterminer la limite de $\frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
- On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a . Déterminer la limite de $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $] -\infty, 1[$ par :

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \text{ si } t \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \text{ et } f(0) = 1.$$

- Donner le développement limité de $x \mapsto \ln(1-x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
- En déduire que f est continue en 0.
- f est-elle dérivable en 0? Si oui, préciser le nombre dérivé $f'(0)$.
- Calculer pour tout x de $] -\infty, 0[\cup]0, 1[, f'(x)$.
- Prouver que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 6. On considère la fonction $g : x \mapsto x^x$.

- Justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Est-elle dérivable en 0?
- Dresser le tableau de variations de g .
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de g .
- Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 1 pour g .
- Déterminer la position relative de la tangente au point d'abscisse 1 par rapport à la courbe représentative de g .
- Représenter sur l'intervalle $]0, 2]$ la courbe représentative de g et la tangente obtenue précédemment sur le même graphique.
On donne $e^{-1} \approx 0,37$ et $g(e^{-1}) \approx 0,69$.

Exercice 7. 1. Soit $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Montrer que f se prolonge en 0 en une fonction dérivable, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en 0.

2. Même question pour la fonction $g(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}}$.

3. Même question pour la fonction $h(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln 2}{x^2 \ln x}$ en 1.

Exercice 8. 1. Soit $f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique T en $+\infty$, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T . (On pourra effectuer le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et faire un développement limité de f lorsque $X \rightarrow 0$).

2. Même question pour la fonction $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$.

3. Même question pour la fonction $h(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$.

Exercice 9. 1. Soit I un intervalle contenant 0 et f une solution sur I de l'équation différentielle : $y' = 1 - 2y^2$ vérifiant $f(0) = 1$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et en déduire que f' admet un DL à tout ordre en 0.

(b) On pose $f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a + bx + cx^2 + o(x^2)$.

i. Déterminer le $DL_3(0)$ de f à l'aide de a, b et c .

ii. Déterminer alors le $DL_2(0)$ de $1 - 2(f(x))^2$.

iii. En déduire les valeurs de a, b et c , puis le $DL_3(0)$ de f .

2. En remarquant que $\tan' = 1 + \tan^2$ déterminer le $DL_5(0)$ de $\tan$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$. On note W sa réciproque.

2. Justifier que W admet un développement limité à tout ordre en 0.

3. Déterminer un $DL_2(0)$ de W .

Exercice 11. Soit $f :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 \tan(x) - x$.

1. Montrer que f est une bijection et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que f^{-1} est impaire.

3. Calculer le $DL_4(0)$ de f^{-1} .

Exercice 12. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note x_n .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$.

3. Montrer que $x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ puis que $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 13. On considère l'équation $x^n = x + n$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

2. Justifier que pour tout $n \geq 2$, $x_n \geq 1$.

3. Justifier que (x_n) converge et déterminer $\lim x_n = \ell$.

4. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$ pour tout $n \geq 2$ et en déduire la monotonie de (x_n) .

5. Montrer que $\ln(x_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

6. En déduire un équivalent de $x_n - \ell$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

2. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq \ln(2n)$.

(b) Montrer que $u_n \sim \ln(n)$.

4. Montrer que $u_n - \ln(n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

- $x \cos(x) - e^x = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.
- $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{4} + o(x^2)$.
- $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.
- $\frac{e^{4x} - 1}{x} = 4 + 8x + \frac{32x^2}{3} + \frac{32x^3}{3} + o(x^3)$.
- $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x - \pi/6}{2} - \frac{\sqrt{3}(x - \pi/6)^2}{4} + \frac{(x - \pi/6)^3}{12} + o((x - \pi/6)^3)$.
- $\sqrt{1+x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
- $x e^x \ln(1+x) = x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.
- $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{4+x}} = \frac{1}{2} + \frac{3x}{16} - \frac{21x^2}{256} + o(x^2)$.
- $\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$.
- $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 - \frac{3e}{16}x^3 + \frac{139e}{1152}x^4 + o(x^4)$.
- $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4)$.
- $\ln(1+x^3+x^6) = x^3 + o(x^4)$.
- $\sqrt{\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^5)$.
- $\ln\left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.
- $\arctan\left(\frac{2(1-x)}{1+4x}\right) = \arctan(2) - 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^4)$.
- $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + o(x^2)$.
- $\frac{\ln(1+x)}{x+e^x} = x - \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$.
- $\frac{x^2-1}{e^x-e} = 2e^{-1} - \frac{e^{-1}}{3}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

Exercice 2 :

- $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$
- $2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}$
- $\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 3 :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\arctan x} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln x} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\tan x - x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{x\sqrt{x}-1} = \frac{8}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 4 :

- On a $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$ et $f(a+2h) = f(a) + 2hf'(a) + o(h)$. Donc $\frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} = f'(a) + o(1) \rightarrow f'(a)$.
- On a $f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = f(a) + hf'(a) + h^2 f''(a)/2 + f(a) - hf'(a) + h^2 f''(a)/2 - 2f(a) + o(h^2)$, donc $\frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} \rightarrow f''(a)$.

Exercice 5 :

- C'est du cours! $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$.
- Ainsi, $f(t) = \frac{t + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t} = 1 + \frac{t}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t)$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$: f est continue en 0.
- On vient de voir que f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc f est dérivable en 0. De plus, $f'(0) = \frac{1}{2}$.
- Pour x dans $] -\infty, 0[\cup] 0, 1[$, $f'(x) = -\frac{-\frac{1}{1-t}t - \ln(1-t)}{t^2} = \frac{t + (1-t)\ln(1-t)}{t^2(1-t)}$.
- On remarque que f' est continue sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles. Ensuite, $f'(t) = \frac{t - (1-t)(t + \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2))}{t^2(1-t)} = \frac{t - t + t^2 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} - o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{t^2} = \frac{1}{2} + o_{t \rightarrow 0}(1)$. Ainsi, $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{2} = f'(0)$: f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$.

Exercice 6 :

- Pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{x \ln(x)}$. La fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] 0, +\infty[$ et la fonction $X \mapsto e^X$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] 0, +\infty[$.
- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$. Ainsi, g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.
 $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{e^{x \ln(x)} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x} = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$. Donc g n'est pas dérivable en 0.
- On calcule $g'(x) = x^x (\ln(x) + 1)$ qui s'annule pour $x = e^{-1}$. g est décroissante sur $[0, e^{-1}]$ puis croissante.
- $y = g'(1)(x-1) + g(1) = x$. La tangente est donc $y = x$.
- On pose $X = x - 1$, on trouve $g(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$.
- Comme le coefficient du terme d'ordre 2 du DL est positif, la courbe est au-dessus de la tangente.

7. cf. Geogebra.

Exercice 7 :

- On calcule un développement limité de f à l'ordre 3 en 0 : $f(x) = \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3)$. Ainsi f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ et elle est alors dérivable avec $f'(0) = \frac{1}{6}$. On a un point d'inflexion : la tangente est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ pour $x < 0$ et au-dessous pour $x > 0$.
- $g(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Même chose que pour f mais les positions sont inversées.
- $h(x) = \frac{1}{2} - \frac{7}{8}(x-1) + \frac{19}{16}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$. Même chose que précédemment mais la tangente est toujours au-dessous de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8 :

- On fait le changement de variable $X = \frac{1}{x}$ puis on développe f lorsque $X \rightarrow 0$: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o(1/x^2)$. Donc $T : y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et elle est au-dessous de $\mathcal{C}_f$.
- $g(x) = x + 1 - \frac{1}{x^2} + o(1/x^3)$. $T : y = x + 1$ est asymptote et est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.
- $h(x) = -x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12x} + o(1/x)$. $T : y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote et est au-dessus de $\mathcal{C}_h$.

Exercice 9 :

- Déjà, f est dérivable sur I car solution d'une équation différentielle d'ordre 1. Puis, $f' = 1 - 2f^2$ est aussi dérivable sur I par opérations. Donc f est deux fois dérivable sur I , etc... Par récurrence immédiate, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .
 - On peut primitiver un DL : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + o(x^3)$.
 - $1 - 2(f(x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2(1 + ax + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2))^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - 4ax - 2(a^2 + b)x^2 + o(x^2)$.
 - Par unicité du DL : $a = -1$, $b = -4a = 4$ et $c = -2(a^2 + b) = -10$. Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + 2x^2 - \frac{10}{3}x^3 + o(x^3)$.
- $\tan$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, elle admet des DL à tout ordre en 0, de même que $\tan'$. On note $\tan'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + o(x^4)$, de sorte que $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{4}x^4 + \frac{e}{5}x^5 + o(x^5)$. Or, $b = d = 0$ car $\tan$ est impaire. Puis, $1 + \tan(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + (ax + \frac{c}{3}x^3 + o(x^3))^2 = 1 + x^2(a^2 + 2\frac{ac}{3}x^2 + o(x^2)) = 1 + a^2x^2 + \frac{2ac}{3}x^4 + o(x^4)$. Par unicité du DL, on obtient $a = 1$, $c = a^2 = 1$, $e = \frac{2ac}{3} = \frac{2}{3}$, donc on retrouve $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Exercice 10 :

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+x)e^x$. Donc pour tout $x > -1$, $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. On applique le TBM : la fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$ et $f(-1) = -e^{-1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-e^{-1}, +\infty[$.
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]-1, +\infty[$. Donc W est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-e^{-1}, +\infty[$. Elle admet donc un DL en 0 à tout ordre d'après TL.
- On pose $W(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} W(0) + ay + by^2 + o(y^2)$. Or $f(0) = 0$, donc $W(0) = 0$. De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^2 + o(x^2)$. Comme $W(f(x)) = x$, par unicité du DL : $W(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} af(x) + b(f(x))^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + (a+b)x^2 + o(x^2)$, donc $a = 1$ et $b = -a$. D'où $W(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - x^2 + o(x^2)$.

Exercice 11 :

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $f'(x) = 2 + 2\tan^2(x) - 1 = 1 + \tan^2(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, continue et $\lim_{x \rightarrow \pm\pi/2} f(x) = \pm\infty$, donc f réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. De plus sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car f' ne s'annule jamais.
- Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $y = f(x)$. Comme f est impaire, $-y = f(-x)$. Donc $f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$. Donc f^{-1} est impaire.
- Comme f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un DL à tous les ordres en 0. Comme elle est impaire, on a $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} ay + by^3 + o(y^4)$, et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$. Donc $x = f^{-1}(f(x)) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + \frac{2a}{3}x^3 + bx^3 + o(x^4)$. Par unicité des coefficients des DL, $a = 1$ et $b = -\frac{2}{3}$. Donc $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \frac{2y^3}{3} + o(y^4)$.

Exercice 12 :

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n(x) = x^3 + nx - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = 3x^2 + n > 0$ si $x \neq 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = \pm\infty$. D'après le TVI strictement croissant, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution sur $\mathbb{R}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1/n) = 1/n^3 > 0$ et f est strictement croissante, on a $0 < x_n < \frac{1}{n}$.
- D'après la question précédente, $x_n \rightarrow 0$. De plus, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{x_n^3}{n}$ pour $n > 0$. Comme $x_n^3 \rightarrow 0$, on a $\frac{x_n^3}{n} = o(1/n)$, et $x_n \sim \frac{1}{n}$. Puis, $x_n - \frac{1}{n} = -\frac{x_n^3}{n}$. Or $x_n \sim \frac{1}{n}$, donc $\frac{x_n^3}{n} \sim \frac{1}{n^4}$. D'où $x_n - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{n^4}$. Ainsi, $x_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^4} + o(1/n^4)$.

Exercice 13 :

- Soit $n \geq 2$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n - x - n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1$. Alors $f'_n(x) = 0 \iff x^{n-1} = \frac{1}{n}$. Donc sur $\mathbb{R}_+$, f'_n ne s'annule qu'en $\frac{1}{n-1\sqrt[n-1]{n}}$. Comme $f_n(0) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, d'après le TVI strictement croissant, l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.

2. Comme $f_n(1) = -n < 0$, on a $x_n > 1$.
3. Soit $n \geq 2$. Comme $f_{n+1}(x_n) = x_n(x_n + n) - n - 1 = n(x_n - 1) + x_n^2 - 1 > 0$. Donc $x_{n+1} < x_n$.
4. Comme (x_n) est décroissante et minorée, elle converge vers $\ell \geq 1$. Alors $n \ln(x_n) = \ln(x_n + n) = \ln(n) + \ln(1 + x_n/n)$ donc $\ln(x_n) = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(1 + x_n/n)}{n} \rightarrow 0$. Par continuité de l'exponentielle, $x_n \rightarrow 1$.
5. On a $\frac{\ln(1 + x_n)}{n} = o(\ln(n)/n)$, donc $\ln(x_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.
6. On a $\ln(x_n) = \ln(1 + x_n - 1) \sim x_n - 1$ car $x_n \rightarrow 0$. Donc $x_n - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 14 :

1. On procède par récurrence en utilisant que la fonction logarithme est positive sur $[1, +\infty[$.
2. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = \ln(n - 1 + u_{n-1}) \geq \ln(n - 1)$ car u_{n-1} est positif et $\ln$ est croissante. Comme $\ln(n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, (u_n) diverge vers $+\infty$.
3. (a) On procède par récurrence.
 - Initialisation : pour $n = 2$, $u_2 = \ln(2) \leq \ln(4) = 2\ln(2)$.
 - Hérédité : soit $n \geq 2$, supposons que $u_n \leq \ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leq n - 1$, donc $u_n \leq \ln(2) - 1 + n$. Par croissance de $\ln$, $u_{n+1} \leq \ln(2n + \ln(2) - 1) \leq \ln(2(n + 1))$.
- (b) On a pour tout $n \geq 2$, $\ln(n - 1) \leq u_n \leq \ln(2) + \ln(n)$. Or $\ln(n - 1) \sim \ln(2) + \ln(n)$, donc $u_n \sim \ln(n - 1) \sim \ln(n)$ par encadrement.
4. Soit $n \geq 2$, $u_n - \ln(n) = \ln\left(\frac{n + u_{n-1}}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_{n-1}}{n}\right) \sim \frac{u_{n-1}}{n}$ car $u_{n-1} = o(n)$. Or $\frac{u_{n-1}}{n} \sim \frac{\ln(n)}{n}$, donc $u_n - \ln(n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.