

Chapitre 20 : Espaces vectoriels

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

I. Espaces vectoriels

I.1. Définition et exemples

Définition I.1. On appelle **espace vectoriel sur \mathbb{K}** (ou \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathbb{K} -ev) un ensemble E muni :

- d'une loi de composition interne $+$:

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

- d'une loi de composition externe \cdot :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda \cdot u \end{aligned}$$

qui vérifient :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif :
 - Élément neutre** : il existe $0_E \in E$ tel que : $\forall u \in E, u + 0_E = u$;
 - Associativité** : pour tous $u, v, w \in E, (u + v) + w = u + (v + w)$;
 - Inverses** : pour tout $u \in E$, il existe $-u \in E$ tel que $u + (-u) = 0_E$;
 - Commutativité** : pour tous $u, v \in E, u + v = v + u$.
- pour tout $u \in E, 1 \cdot u = u$;
- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$;
- pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, et $u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$;
- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u \in E, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \mu) \cdot u$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et ceux de \mathbb{K} sont appelés **scalaires**.

Exemples I.1. 1. \mathbb{R} est un \mathbb{R} -ev. \mathbb{C} est un \mathbb{C} -ev.

- \mathbb{R}^2 est un \mathbb{R} -ev : c'est le plan. \mathbb{C} est aussi un \mathbb{R} -ev.
- \mathbb{R}^3 est un \mathbb{R} -ev : c'est l'espace.
- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{K}^n$ est un \mathbb{K} -ev. Les lois sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n & \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) &\mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) & (\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) &\mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

On peut vérifier que ces deux lois vérifient les propriétés voulues, avec notamment $0_{\mathbb{K}^n} = (0, 0, \dots, 0)$.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -ev (voir le chapitre 15).
- $\mathbb{K}[X]$ est un \mathbb{K} -ev (voir le chapitre 18).

Proposition I.1. Si Ω est un ensemble non vide et E est un \mathbb{K} -ev, alors $\mathcal{F}(\Omega, E) = \{f : \Omega \rightarrow E\}$ est un \mathbb{K} -ev pour les lois :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Omega, E) \times \mathcal{F}(\Omega, E) &\rightarrow \mathcal{F}(\Omega, E) & \mathbb{K} \times \mathcal{F}(\Omega, E) &\rightarrow \mathcal{F}(\Omega, E) \\ (f, g) &\mapsto f + g & (\lambda, f) &\mapsto \lambda f \end{aligned}$$

où $f + g$ et λf sont définies par $\forall x \in \Omega, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Le vecteur nul $0_{\mathcal{F}(\Omega, E)}$ est la fonction constante égale à 0_E .

En particulier, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (fonctions réelles), $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (suites numériques) sont des \mathbb{R} -ev.

Proposition I.2. Soit E un \mathbb{K} -ev, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$.

- $\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$;
- $(-1) \cdot u = -u$.

I.2. Combinaisons linéaires

Définition I.2. Soit E un \mathbb{K} -ev. On dit que le vecteur u est **combinaison linéaire** des vecteurs u_1, u_2, \dots, u_p s'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p$.

Exemples I.2.

- Tout vecteur de \mathbb{K}^n est combinaison linéaire des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n , où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 est à la i -ième coordonnée).
- Tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ est combinaison linéaire de $1, X, X^2, \dots, X^n$.

Remarque I.1. Les scalaires ne sont en général pas unique. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , $u = (1, 3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (1, 5)$ et $u_3 = (2, 2)$. On peut en effet écrire $u = 2u_1 + u_2 - u_3 = -6u_1 - u_2 + 4u_3$. En particulier, on ne peut pas en général identifier les coefficients dans les CL.

I.3. Sous-espaces vectoriels

Définition I.3. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -ev. Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est non vide;
- **stabilité par l'addition** : $\forall x, y \in F, x + y \in F$;
- **stabilité par la multiplication par un scalaire** : $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x \in F$.

Remarque I.2. En particulier, si F est un sev, alors toute combinaison linéaire d'éléments de F est encore dans F .

Proposition I.3.

1. Si F est un sev de $(E, +, \cdot)$, alors $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
2. F est un sev ssi $0_E \in F$ et $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x + y \in F$.

Remarque I.3. Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut souvent montrer que c'est un sev d'un espace vectoriel bien connu.

Exemples I.3.

1. Si E est un \mathbb{K} -ev, alors $\{0_E\}$ est un sev.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.
3. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et I un intervalle, l'ensemble des fonctions qui sont k fois dérivables et dont les dérivées sont continues $\mathcal{C}^k(I)$ est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (voir le chapitre 17).

Proposition I.4. Soit E est un \mathbb{K} -ev avec $E \neq \{0_E\}$ et soit $u \in E \setminus \{0_E\}$. L'ensemble $\mathbb{K}u = \{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sev de E . C'est la **droite vectorielle engendrée par u** .

Théorème I.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0_n$ est un sev de \mathbb{K}^p .
En particulier, toute droite de \mathbb{R}^2 passant par $(0, 0)$ est un sev de \mathbb{R}^2 et tout plan de \mathbb{R}^3 passant par $(0, 0, 0)$ est un sev de \mathbb{R}^3 .

Remarque I.4. Une droite de \mathbb{R}^2 qui ne passe pas par $(0, 0)$ n'est pas un sev (car $0_{\mathbb{R}^2}$ ne lui appartient pas).

Théorème I.6

L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une EDL homogène est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Proposition I.7. Soit $(F_i)_{i \in J}$ une famille de sev d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Alors $F = \bigcap_{i \in J} F_i$ est un sev de E .

Remarque I.5. Attention, la réunion de deux sev n'est en général pas un sev.

I.4. Sous-espaces vectoriels engendrés par une famille finie de vecteurs

Proposition I.8. Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E . L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est un sev de E appelé **sous-espace vectoriel engendré par** u_1, u_2, \dots, u_p et noté $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$:

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \right\}.$$

Exemples I.4. • Le sous espace vectoriel $\text{Vect}((1, 0))$ du plan est la droite de \mathbb{R}^2 passant par $(0, 0)$ et dirigée par $(1, 0)$.

- Plus généralement, si $u \neq 0_E$, alors $\text{Vect}(u) = \mathbb{K}u$ est la droite vectorielle engendrée par u .
- $\text{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) = \mathbb{K}_n[X]$.

Proposition I.9. Soit (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E . Alors

$$\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ u_1, u_2, \dots, u_p \in F}} F.$$

Autrement dit, c'est le plus petit des sev de E qui contient u_1, u_2, \dots, u_p : tout sev F de E qui contient les vecteurs u_1, \dots, u_p contient $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Corollaire I.10. Soit E un \mathbb{K} -ev et n, p deux entiers naturels.

Soient $u_1, u_2, \dots, u_p \in E$ et $v_1, v_2, \dots, v_n \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Alors $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) \subset \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.
En particulier, si $u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$ alors $\text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_{p-1})$.

II. Familles finies de vecteurs

II.1. Familles génératrices

Définition II.1. Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E . On dit que \mathcal{F} est une famille **génératrice finie** de E , ou encore que u_1, u_2, \dots, u_p **engendrent** E , si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des éléments de \mathcal{F} :

$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \mid u = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i.$$

Autrement dit, $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque II.1. Certains \mathbb{K} -ev n'ont pas de famille génératrice finie. Par exemple $\mathbb{K}[X]$. Par contre la famille infinie $(1, X, X^2, \dots)$ est génératrice car tout polynôme peut s'écrire comme une CL finie de monômes. Mais c'est hors programme.

Proposition II.1. 1. Si \mathcal{F} est une famille génératrice de E et \mathcal{F}' contient \mathcal{F} , alors \mathcal{F}' est aussi génératrice.
2. Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de E et $u \in E$. Alors

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$$

Autrement dit, si un vecteur d'une famille génératrice est combinaison linéaire des autres, alors on peut l'enlever sans changer le caractère générateur.

II.2. Familles libres et liées

Définition II.2. Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un \mathbb{K} -ev E . On dit que la famille \mathcal{F} est **libre**, ou encore que les vecteurs u_1, u_2, \dots, u_p sont **linéairement indépendants**, si :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Une famille qui n'est pas libre est **liée** (les vecteurs sont **linéairement dépendants**).

Lorsque deux vecteurs sont liés, on dit qu'ils sont **colinéaires**.

Autrement dit, u et v sont liés ssi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ pas tous les deux nuls tels que $\lambda u + \mu v = 0_E$.

Méthode. En pratique, pour déterminer si une famille (u_1, u_2, \dots, u_p) est liée ou non, on résout le système $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$ d'inconnues les λ_i . Si on trouve comme seule solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, alors la famille est libre. Sinon, on a trouvé une **relation de liaison**.

Exemples II.1.

- Une famille composée d'un seul vecteur non nul est libre.
- Une famille qui contient le vecteur nul est liée.

Proposition II.2. Soit E un \mathbb{K} -ev et (u_1, u_2, \dots, u_p) une famille libre. Alors,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \forall (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p, \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^p \mu_i u_i \Rightarrow (\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = \mu_i).$$

Autrement dit, on peut identifier les coefficients dans les combinaisons linéaires.

Proposition II.3. 1. Une famille de vecteurs est liée si et seulement si un des vecteurs s'écrit comme une combinaison linéaire des autres.

2. Si (u_1, u_2, \dots, u_p) est une famille libre de E , et $u \in E$, alors

$$(u_1, u_2, \dots, u_p, u) \text{ est liée} \iff u \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p).$$

3. Toute sous-famille de vecteurs d'une famille libre est encore libre.

4. Toute sur-famille de vecteurs d'une famille liée est encore liée.

Proposition II.4. Soit (P_1, P_2, \dots, P_n) une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$. Alors cette famille est libre.

II.3. Bases

Définition II.3. On dit qu'une famille (u_1, u_2, \dots, u_n) de vecteurs de E est une **base** de E si elle est libre et génératrice de E .

Proposition II.5. Une famille (u_1, u_2, \dots, u_n) de vecteurs de E est une base ssi :

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^n x_i u_i.$$

On appelle alors (x_1, x_2, \dots, x_n) les **coordonnées de x dans la base** (u_1, \dots, u_n) .

Exemples II.2.

- Dans \mathbb{R}^2 , $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment une base, appelée **base canonique** de \mathbb{R}^2 . De même pour $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^3 .

Plus généralement, dans \mathbb{K}^n la base canonique est (e_1, e_2, \dots, e_n) où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 est en i -ème position).

- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base.

III. Somme de deux sous-espaces vectoriels

- Pour $a \in \mathbb{K}$ donné, la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ (Taylor) et elle est libre. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base, où E_{ij} est la matrice avec un 1 à la i -ième ligne j -ième colonne et des 0 ailleurs.

III. Somme de deux sous-espaces vectoriels

III.1. Somme

Définition III.1. Soient F et G deux sev d'un \mathbb{K} -ev E . La **somme** de F et G est l'ensemble

$$F + G = \{x_F + x_G, \text{ avec } x_F \in F, x_G \in G\} = \{x \in E \mid \exists x_F \in F, \exists x_G \in G, x = x_F + x_G\}.$$

Proposition III.1. 1. La somme de deux sev est un sev.

2. Si $F = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_m)$, alors $F + G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m)$.

Remarque III.1. En général, un élément de $F + G$ ne s'écrit pas de manière unique comme une somme d'un élément de F et de G .

III.2. Somme directe

Définition III.2. Soit E un \mathbb{K} -ev et F et G deux sev de E . On dit que F et G sont en **somme directe** si tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\forall x \in F + G, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \mid x = x_F + x_G.$$

On note alors la somme $F \oplus G$.

Proposition III.2. Soient E un \mathbb{K} -ev et F et G deux sev de E . Alors F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemple III.1. Dans \mathbb{R}^2 , deux droites vectorielles sont en somme directe dès lors que leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Définition III.3. Soient E un \mathbb{K} -ev et F et G deux sev de E . On dit que F et G sont **supplémentaires dans E** lorsque tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . Autrement dit, F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$.

Remarque III.2. Attention à ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un sev n'est pas un sev (car 0_E n'est pas dedans).

De plus, un sev a beaucoup de supplémentaires. Par exemple, une droite vectorielle dans le plan a une infinité de supplémentaires.

Méthode. On peut parfois utiliser une analyse-synthèse pour montrer que deux sev sont supplémentaires.

Proposition III.3. Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E et $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $G = \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$.

1. \mathcal{F} est génératrice de $E \iff F + G = E$.

2. Si \mathcal{F} est libre, alors F et G sont en somme directe.

3. Si \mathcal{F} est une base de E , alors F et G sont supplémentaires.

Si on suppose de plus que (u_1, \dots, u_k) et (u_{k+1}, \dots, u_n) sont libres, alors les deux derniers points précédents sont des équivalences.