Espaces vectoriels - Exercices

I. Sous-espaces vectoriels

Exercice I.1. 1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(a) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2x = y\}$
(b) $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$
(c) $F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
(d) $F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2x = y \text{ et } x + y + z = 0\}$

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?

(a) $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1\}$
(b) $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0\}$
(c) $F_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t \leq 0\}$
(d) $F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \sin(x + y + z + t) = 0\}$

3. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

(a) $F_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi - \text{périodique}\}$
(b) $F_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
(c) $F_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est majorée}\}$
(d) $F_4 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$

4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

(a) $F_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X+1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\}$
(b) $F_2 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(2) = 1\}$
(c) $F_3 = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1) = P(2)\}$
(d) $F_4 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid 5P - (X-1)P' = 0\}$

5. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

(a) $F_1 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n = o(n^2)\}$
(b) $F_2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 1\}$
(c) $F_3 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim u_n = 0\}$
(d) $F_4 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$

6. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

(a) $F_1 = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
(b) $F_2 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ ($A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est fixée)
(c) $F_3 = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$
(d) $F_4 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid MM^\top = I_n\}$

Exercice I.2. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les écrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, x = 2\alpha - 4\beta, y = -\alpha + 5\beta, z = 3\beta\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
3. $F_3 = \{aX^3 + bX + c, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $F_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
5. $F_5 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ est deux fois dérivable et } f'' + f = 0\}$
6. $F_6 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(2) = P''(2) = 0\}$

Exercice I.3. Soient F et G deux sev d'un même espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$. *On pourra faire un dessin !*

II. Familles finies de vecteurs

Exercice II.1. Les familles suivantes sont-elles liées ? Si oui, donner une relation de liaison.

1. $\vec{u} = (2,1,1)$, $\vec{v} = (1,3,1)$ et $\vec{w} = (-2,1,3)$.
2. $\vec{u} = (1,0,3)$, $\vec{v} = (0,1,2)$ et $\vec{w} = (2,-3,0)$.
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice II.2. À quelle condition sur $t \in \mathbb{C}$ la famille $((1,t,-1),(t,1,1),(0,t,-t))$ est-elle libre ?

Exercice II.3. On considère les trois vecteurs $\vec{u} = (3,1)$, $\vec{v} = (-1,2)$ et $\vec{w} = (1,-1)$.

1. La famille $\mathscr{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?
2. On note $\mathscr{F}_1$ la famille obtenue à partir de $\mathscr{F}$ en enlevant un des trois vecteurs. La famille $\mathscr{F}_1$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$? Est-elle libre ?

Exercice II.4.

1. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée et exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (b) Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ et trouver une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
2. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   (a) La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Déterminer une équation de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.
   (c) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont-ils dans $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$?
3. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer des équations de $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice II.5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique.

1. Montrer que les vecteurs $f_1 = (2,1,2)$, $f_2 = (3,-2,1)$ et $f_3 = (0,2,1)$ forment une famille libre de E.
2. Montrer que chaque e_i est une combinaison linéaire des f_i. En déduire que (f_1, f_2, f_3) est une base de E.
3. Donner les coordonnées de $f = (1,1,1)$ dans la base (f_1, f_2, f_3).

Exercice II.6. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de I_2 dans cette base.

Exercice II.7. Soit $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc$ est non nul.

Exercice II.8. Déterminer une base de chacun des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$
3. $E_3 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $E_4 = \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'' + 2y' + y = 0\}$

Exercice II.9.

1. Soit $f : x \mapsto \sin x$ et $g : x \mapsto \cos x$. Montrer que la famille (f, g) de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.
2. Montrer que la famille $(x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin(x+1), x \mapsto \sin(x+2))$ est liée.
3. La famille $(1 + X, X + X^2, 1 + X^2)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}[X]$?
4. Montrer que les trois suites $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w_n = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres.
5. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels distincts. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

Exercice II.10.

1. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ distincts et $g_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_1 x}$ et $g_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_2 x}$. Montrer que la famille (g_1, g_2) est libre.
2. Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des réels. Montrer que la famille $(x \mapsto \mathrm{e}^{a_i x})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.
3. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des complexes tous distincts. Montrer que la famille $(x \mapsto \mathrm{e}^{a_i x})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre.

III. Sommes de sev

Exercice III.1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(1,1,1))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1,1),(0,1,0))$.

1. Montrer que $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ sont dans $F+G$.
2. En déduire que $F+G=E$. A-t-on $F \oplus G = E$?

Exercice III.2. Soit $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_1[X]$.

Exercice III.3. Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax+b, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}),\mathbb{R})$.

Exercice III.4. Soient $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles convergentes, $\mathscr{C}_0$ l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0 et $\mathscr{D}$ l'ensemble des suites constantes.
1. Montrer que $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{D}$ sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \oplus \mathscr{D}$.

Exercice III.5.
1. Montrer que les sous-ensembles $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y=0\}$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+t=0\}$ sont des sev de $\mathbb{R}^4$. Sont-ils en somme directe ?
2. Mêmes questions avec $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+y+2z=0 \text{ et } x+2y+z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=0\}$.
3. Mêmes questions avec $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire supérieure}\}$ et $G = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire inférieure}\}$.

Exercice III.6.
1. Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $P \subset E$ l'ensemble des fonctions paires et $I \subset E$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice III.7. Soit $H = \left\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+x_2+\dots+x_n = 0\right\}$ et $u = (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice III.8. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \geq 0$. On pose $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A|P\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et que F et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice III.9. Soient F, G et H trois sev de E avec $G \subset H$. On suppose de plus que $F \cap G = F \cap H$ et que $F+G = F+H$.
Montrer que $G = H$.

Exercice III.10. Soit F et G deux sev de E et H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G.
Montrer que F et H sont supplémentaires dans $F+G$.