Colles 22 - 23/03/2026 au 27/03/2026

Thèmes traités en classe

- Chapitre 18 : Polynômes.
  Exercices traités en classe : I.1, I.3, II.2, II.4, III.1, III.3, III.4, III.7, III.8, IV.2, IV.3, IV.4, IV.7, IV.8, V.2, IV.1, V.1, V.3, III.5.
- Chapitre 19 : Développements limités.
  1. Définition, unicité.
  2. DL d'une fonction paire/impaire.
  3. Troncature, partie principale.
  4. Primitivation d'un DL.
  5. Formule de Taylor-Young.
  6. DL usuels.
  7. Méthodes de calcul.
  8. Applications : calculs de limites, étude de tangente/asymptote.

  Exercices traités en classe : 1, 5, 7, 8, 10.
- Chapitre 20 : Espaces vectoriels.
  1. Définition et exemples importants.
  2. Combinaisons linéaires.
  3. Sous-espaces vectoriels : définition, exemples.
  4. Intersection de sev, sev engendré par une famille finie de vecteurs.
  5. Famille génératrice, famille libre/liée,
  6. Somme de deux sev.
  7. Somme directe, supplémentaires. base.

  Pas d'exercices sur ce chapitre

Questions de cours

Pour tout le monde : Déterminer une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples.

Question 1

- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que α est racine de P ssi $X-\alpha | P$.
- Exemple du cours : soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes deux à deux distincts.
  1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
  2. Soient $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P(a_j) = b_j$.
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis calcul de la somme et du produit des racines de l'unité en utilisant les relations coefficients-racines.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. α est racine de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de P. Puis, α est racine de multiplicité m de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de multiplicité m de P.
- Exemple du cours : factorisation de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- C18 Exercice III.7 : résoudre $Q(X) = Q(X+1)$ d'inconnue $Q \in \mathbb{C}[X]$ par analyse-synthèse.
- C18 Exercice IV.3 : soit $P = X^8 + 9X^7 + 23X^6 + 27X^5 + 63X^4 + 27X^3 + 61X^2 + 9X + 20$. Vérifier que i est racine de P puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- C18 Exercice IV.8 : on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
  1. Factoriser $\cos(nx) + \cos((n-2)x)$ et en déduire une relation entre T_n, T_{n-1} et T_{n-2}.
  2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
- Développement limité de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en 0 à l'ordre n, avec la démonstration.
- Énoncer la formule de Taylor-Young avec ses hypothèses. Retrouver le DL de $x \mapsto e^x$ en 0.

- Déterminer le $DL_5(0)$ de tan : à partir de $\dfrac{\sin}{\cos}$ puis en primitivant le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
- C19 Exercice 5 : On considère $f :]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 1$ et $f(t) = -\dfrac{\ln(1-t)}{t}$ pour $t \neq 0$.
  1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.
  2. En utilisant le $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$, justifier que f est dérivable en 0.
  3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire $AX = 0$ (avec $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) est un sev de $\mathbb{K}^p$. Illustration avec le cas des droites vectorielles du plan et des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
- L'intersection d'une famille de sev est un sev.
- Sev engendré par $(u_1, \ldots, u_p)$: définition et démonstration que c'est un sev.
- Une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ échelonnée en degré est libre. Démonstration par l'absurde.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▹ Degré et opérations sur les polynômes.
  - ▹ Degré et dérivation formelle.
  - ▹ Divisibilité et degré.
  - ▹ Théorème de la division euclidienne.
  - ▹ Factorisation en facteurs irréductibles unitaires.
  - ▹ Formule de Taylor pour les polynômes.
  - ▹ Caractérisation de la multiplicité d'une racine avec les dérivées successives.
  - ▹ Théorème sur les racines d'un polynôme et divisibilité.
  - ▹ Nombre maximal de racines.
  - ▹ Relations coefficients racines.
  - ▹ Théorème de d'Alembert-Gauss.
  - ▹ Racines complexes d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
  - ▹ Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
  - ▹ Décomposition en éléments simples pour un dénominateur scindé à racines simples.
  - ▹ $DL(0)$ et parité.
  - ▹ Théorème de primitivation des DL.
  - ▹ Formule de Taylor-Young.
  - ▹ Développements limités usuels.
  - ▹ Condition pour rajouter un vecteur à un Vect sans changer le Vect.
  - ▹ Condition nécessaire et suffisante pour rajouter un vecteur à une famille libre et rester libre.
  - ▹ Famille de polynômes échelonnés en degrés.

A savoir faire

1. Savoir déterminer le degré d'un polynôme.
2. Savoir poser la division euclidienne de deux polynômes.
3. Savoir utiliser une racine évidente et sa multiplicité pour factoriser un polynôme.
4. Savoir montrer qu'un polynôme divise un autre en étudiant les racines et leurs multiplicités.
5. Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Savoir faire une décomposition en éléments simples pour déterminer une primitive, calculer une dérivée, une somme, etc...
7. Connaître ses DL usuels et savoir calculer un DL.
8. Savoir utiliser un DL pour calculer une limite/étudier une tangente/une asymptote.