

Chapitre 21 : Dénombrement

I. Ensembles finis

On note $\llbracket 1, n \rrbracket = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n = 0 \\ \{1, 2, \dots, n\} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

I.1. Définition et propriétés

Définition I.1. On dit qu'un ensemble E est fini à n éléments s'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E . C'est une numérotation des éléments de E .

L'entier n s'appelle le **cardinal** de E et est noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

Par convention $\text{card}(\emptyset) = 0$.

Remarque I.1. On admet que s'il existe une bijection entre $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, p \rrbracket$ alors $n = p$, de sorte que le cardinal d'un ensemble est bien défini.

Exemples I.1. • $\text{card}(\llbracket 1, n \rrbracket) = n$.

- $\text{card}(\llbracket p, q \rrbracket) = q - p + 1$ car $\varphi : k \in \llbracket p, q \rrbracket \mapsto k - p + 1 \in \llbracket 1, q - p + 1 \rrbracket$ est une bijection. En effet, $\psi : k \in \llbracket 1, q - p + 1 \rrbracket \mapsto k + p - 1 \in \llbracket p, q \rrbracket$ est son application réciproque.

Théorème I.1 (Admis)

Soit E un ensemble fini et $F \subset E$. Alors F est fini et $\text{card } F \leq \text{card } E$. De plus, $\text{card } F = \text{card } E$ si et seulement si $E = F$.

Théorème I.2

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Si f est bijective alors $\text{card } E = \text{card } F$.
2. Si f est injective alors $\text{card } E \leq \text{card } F$.
3. Si f est surjective alors $\text{card } E \geq \text{card } F$.

Corollaire I.3. Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$ une application.

1. $\text{Im}(f)$ est un ensemble fini et $\text{card}(\text{Im}(f)) \leq \min(\text{card}(E), \text{card}(F))$.
2. (Principe des tiroirs) Si $\text{card}(E) > \text{card}(F)$, alors f n'est pas injective.

Corollaire I.4. Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \rightarrow F$. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

I.2. Opérations et cardinaux

Proposition I.5 (Cardinal d'une union disjointe - Admis). Soit E un ensemble et A et B deux parties finies disjointes de E . Alors $A \cup B$ est finie et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B.$$

Plus généralement, si A_1, A_2, \dots, A_n des parties finies deux à deux disjointes de E , alors $\bigcup_{k=1}^n A_k$ est finie et

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{card } A_k.$$

Corollaire I.6 (Principe des bergers). Soient E et F deux ensembles finis, $f : E \rightarrow F$ une application et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que tout élément de F a exactement k antécédents dans E par f . Alors $\text{card}(E) = k \text{card}(F)$.

Proposition I.7 (Cardinal de la différence). Soit E un ensemble et A et B deux parties finies de E . Alors $A \setminus B$ est finie et

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B).$$

En particulier, si E est fini, $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

Théorème I.8 (Formule du crible)

Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles finis de E . Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{card } A \cup B = \text{card } A + \text{card } B - \text{card } A \cap B.$$

Remarque I.2. On n'a pas de formule simple pour l'union de plus de deux parties.

Théorème I.9

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F).$$

Plus généralement, si E_1, E_2, \dots, E_n sont des ensembles finis, alors $\prod_{k=1}^n E_k$ est fini et

$$\text{card} \left(\prod_{k=1}^n E_k \right) = \prod_{k=1}^n \text{card}(E_k).$$

En particulier, $\text{card}(E^n) = (\text{card } E)^n$.

II. Comptons les applications

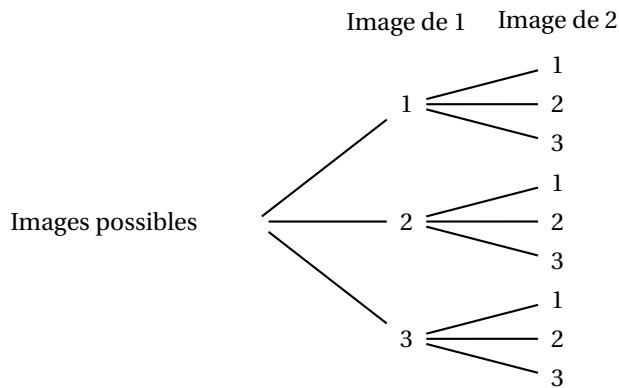
II.1. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème II.1

Si E et F sont finis, alors $\mathcal{F}(E, F)$ est fini et

$$\text{card } \mathcal{F}(E, F) = (\text{card } F)^{\text{card } E}.$$

Exemple II.1. On peut réaliser un arbre pour trouver le nombre d'applications de $E = \{1, 2\}$ dans $F = \{1, 2, 3\}$.



L'application f est complètement déterminée par ses deux images $f(1)$ et $f(2)$. Autrement dit, on a une bijection $f \in \mathcal{F}(E, F) \mapsto (f(1), f(2)) \in F^2$.

Exemple II.2. On dispose d'une urne contenant 5 boules numérotées. On fait 3 tirages successifs **avec remise**. L'ensemble des boules est $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et l'ensemble des tirages est $E = \{1, 2, 3\}$. Effectuer les 3 tirages avec remises revient à se donner une fonction de E dans F . Or, il y a $(\text{card } F)^{\text{card } E} = 5^3$ telles fonctions. On a donc 125 façons d'effectuer les 3 tirages.

II.2. Arrangements

Définition II.1. Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. Les éléments de E^p s'appellent p -liste ou p -uplet de E .

Théorème II.2 (Nombre de p -listes)

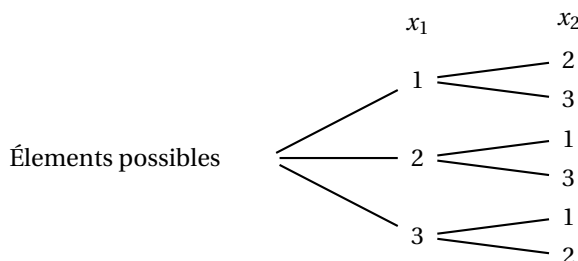
Soit E de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des p -listes de E est de cardinal n^p .

Définition II.2. Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul.

On appelle **arrangement** de p éléments de E tout p -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ d'éléments distincts, c'est-à-dire $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

On notera l'ensemble de ces arrangements $\mathcal{A}_p(E)$.

Exemple II.3. On peut réaliser un arbre pour trouver le nombre d'arrangements de 2 éléments dans $E = \{1, 2, 3\}$.



C'est le même principe que dans l'exemple du paragraphe précédent, sauf qu'on obtient cette fois une injection de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$.

Théorème II.3 (Nombre d'arrangements)

Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est

$$|\mathcal{A}_p(E)| = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

C'est aussi le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple II.4. On dispose d'une urne contenant 5 boules numérotées. On fait 3 tirages successifs **sans remise**. L'ensemble des boules est $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et l'ensemble des tirages est $E = \{1, 2, 3\}$. Effectuer les 3 tirages avec remise revient à se donner une fonction injective de E dans F car deux tirages ne peuvent pas donner la même boule. Or, il y a $\frac{5!}{2!}$ telles injections. On a donc 60 façons d'effectuer les 3 tirages successifs avec remise.

II.3. Permutations

Définition II.3. Une **permutation** d'un ensemble E fini est une bijection de E dans E .

Corollaire II.4. Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n est $n!$.

III. Coefficients binomiaux (bis)

Définition III.1. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. On appelle **p -combinaison** de E toute partie de E de cardinal p .
On notera $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des p -combinaisons de E .

Exemple III.1. Si $E = \{a, b, c, d\}$, les combinaisons de 3 éléments sont $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}$ et $\{b, c, d\}$. À chaque combinaison correspond $3! = 6$ permutations : par exemple, pour $\{a, b, c\}$, il y a $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ et (c, b, a) . Plus précisément, on a une application $f : \mathcal{A}_3(E) \rightarrow \mathcal{P}_3(E)$ qui à un arrangement associe la partie formée des trois éléments de l'arrangement. Chaque élément de $\mathcal{P}_3(E)$ a exactement $3!$ antécédents par f , et on retrouve le principe du berger : $\text{card}(\mathcal{A}_3(E)) = 3! \text{card}(\mathcal{P}_3(E))$.

Plus généralement, l'application $f : \mathcal{A}_p(E) \rightarrow \mathcal{P}_p(E)$ qui à un arrangement de p éléments de E associe la partie de E formée de ces p éléments vérifie encore que tous les éléments de $\mathcal{P}_p(E)$ ont exactement $p!$ antécédents (le nombre de façons d'ordonner les éléments d'une partie). Donc $\text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \frac{\text{card}(\mathcal{A}_p(E))}{p!}$.

Théorème III.1 (Nombre de p -combinaisons)

Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exemple III.2. On dispose d'une urne contenant 5 boules numérotées. On tire 3 boules d'un coup. L'ensemble des boules est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Effectuer le tirage de 3 boules revient à prendre une partie de E à 3 éléments.

Or, il y a $\binom{5}{3}$ telles parties. On a donc 10 façons d'effectuer le tirage de 3 boules.

Proposition III.2 (Rappels). 1. Pour tout $0 \leq n$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = n$.

2. Pour tous $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$;

3. Formule de Pascal : pour tous $1 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

4. Formule du capitaine : pour tout $1 \leq p \leq n$, $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.

Théorème III.3 (Rappel)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Corollaire III.4. Si E est fini de cardinal n , alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et de cardinal 2^n .

Remarque III.1. Les problèmes de dénombrements se ramènent tous à un problème d'urne et de boules, on peut résumer le nombre de tirages de p boules dans une urne qui en contient n (avec $p \leq n$) :

	tirage avec remise	tirage sans remise
tirages successifs	n^p	arrangements
tirage simultané		$\binom{n}{p}$