

Espaces vectoriels - Exercices

I. Sous-espaces vectoriels

Exercice I.1. 1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 ?

- | | |
|--|---|
| (a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2x = y\}$
(b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xz = 0\}$ | (c) $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
(d) $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 2x = y \text{ et } x + y + z = 0\}$ |
|--|---|

2. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 ?

- | | |
|--|---|
| (a) $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 1\}$
(b) $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0\}$ | (c) $F_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t \leq 0\}$
(d) $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \sin(x + y + z + t) = 0\}$ |
|--|---|

3. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

- | | |
|---|---|
| (a) $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$
(b) $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ | (c) $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est majorée}\}$
(d) $F_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$ |
|---|---|

4. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

- | | |
|---|---|
| (a) $F_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X+1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\}$
(b) $F_2 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(2) = 1\}$ | (c) $F_3 = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1) = P(2)\}$
(d) $F_4 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid 5P - (X-1)P' = 0\}$ |
|---|---|

5. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

- | | |
|---|---|
| (a) $F_1 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n = o(n^2)\}$
(b) $F_2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = 1\}$ | (c) $F_3 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim u_n = 0\}$
(d) $F_4 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$ |
|---|---|

6. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

- | | |
|--|--|
| (a) $F_1 = \text{GL}_n(\mathbb{K})$
(b) $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$ ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est fixée) | (c) $F_3 = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$
(d) $F_4 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid MM^T = I_n\}$ |
|--|--|

Exercice I.2. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les écrivant sous la forme $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

- | | |
|---|--|
| 1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, x = 2\alpha - 4\beta, y = -\alpha + 5\beta, z = 3\beta\}$
3. $F_3 = \{aX^3 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
5. $F_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est deux fois dérivable et } f'' + f = 0\}$ | 2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
4. $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - 3z = 0\}$
6. $F_6 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P'(2) = P''(2) = 0\}$ |
|---|--|

Exercice I.3. Soient F et G deux sev d'un même espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.
On pourra faire un dessin!

II. Familles finies de vecteurs

Exercice II.1. Les familles suivantes sont-elles liées? Si oui, donner une relation de liaison.

- | | |
|--|---|
| 1. $\vec{u} = (2, 1, 1), \vec{v} = (1, 3, 1)$ et $\vec{w} = (-2, 1, 3)$.
2. $\vec{u} = (1, 0, 3), \vec{v} = (0, 1, 2)$ et $\vec{w} = (2, -3, 0)$. | 3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
|--|---|

Exercice II.2. À quelle condition sur $t \in \mathbb{C}$ la famille $((1, t, -1), (t, 1, 1), (0, t, -t))$ est-elle libre?

Exercice II.3. On considère les trois vecteurs $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (-1, 2)$ et $\vec{w} = (1, -1)$.

1. La famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle génératrice de \mathbb{R}^2 ?
2. On note \mathcal{F}_1 la famille obtenue à partir de \mathcal{F} en enlevant un des trois vecteurs. La famille \mathcal{F}_1 est-elle génératrice de \mathbb{R}^2 ? Est-elle libre ?

Exercice II.4. 1. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée et exprimer \vec{w} en fonction de \vec{u} et \vec{v} .
- (b) Justifier que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est pas génératrice de \mathbb{R}^3 et trouver une équation cartésienne de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

2. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- (a) La famille (\vec{u}, \vec{v}) est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?
- (b) Déterminer une équation de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

(c) Les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ sont-ils dans $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$?

3. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ des vecteurs de \mathbb{R}^4 . Déterminer des équations de $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice II.5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique.

1. Montrer que les vecteurs $f_1 = (2, 1, 2)$, $f_2 = (3, -2, 1)$ et $f_3 = (0, 2, 1)$ forment une famille libre de E .
2. Montrer que chaque e_i est une combinaison linéaire des f_i . En déduire que (f_1, f_2, f_3) est une base de E .
3. Donner les coordonnées de $f = (1, 1, 1)$ dans la base (f_1, f_2, f_3) .

Exercice II.6. Montrer que $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de I_2 dans cette base.

Exercice II.7. Soit $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Montrer que (\vec{u}, \vec{v}) forme une base de \mathbb{R}^2 si et seulement si $ad - bc$ est non nul.

Exercice II.8. Déterminer une base de chacun des \mathbb{R} -espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$
3. $E_3 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $E_4 = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' + 2y' + y = 0\}$

Exercice II.9. 1. Soit $f : x \mapsto \sin x$ et $g : x \mapsto \cos x$. Montrer que la famille (f, g) de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est libre.

2. Montrer que la famille $(x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin(x+1), x \mapsto \sin(x+2))$ est liée.
3. La famille $(1 + X, X + X^2, 1 + X^2)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}[X]$?
4. Montrer que les trois suites $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w_n = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont libres.
5. Soient a_1, a_2, \dots, a_n des réels distincts. Montrer que la famille $(x \mapsto |x - a_i|)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.

Exercice II.10. 1. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ distincts et $g_1 : x \mapsto e^{\alpha_1 x}$ et $g_2 : x \mapsto e^{\alpha_2 x}$. Montrer que la famille (g_1, g_2) est libre.

2. Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des réels. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{a_i x})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.
3. Soient a_1, a_2, \dots, a_n des complexes tous distincts. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{a_i x})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre.

III. Sommes de sev

Exercice III.1. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (1, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1), (0, 1, 0))$.

1. Montrer que $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont dans $F + G$.
2. En déduire que $F + G = E$. A-t-on $F \oplus G = E$?

Exercice III.2. Soit $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et que $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_1[X]$.

Exercice III.3. Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice III.4. Soient \mathcal{C} l'ensemble des suites réelles convergentes, \mathcal{C}_0 l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0 et \mathcal{D} l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que \mathcal{C} , \mathcal{C}_0 et \mathcal{D} sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{D}$.

Exercice III.5. 1. Montrer que les sous-ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = 0\}$ sont des sev de \mathbb{R}^4 . Sont-ils en somme directe?

2. Mêmes questions avec $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 2z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.
3. Mêmes questions avec $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire supérieure}\}$ et $G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ est triangulaire inférieure}\}$.

Exercice III.6. 1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $P \subset E$ l'ensemble des fonctions paires et $I \subset E$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que P et I sont supplémentaires dans E .

2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice III.7. Soit $H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ et $u = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que H et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^n .

Exercice III.8. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul de degré $n \geq 0$. On pose $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A \mid P\}$. Montrer que F est un sev de $\mathbb{K}[X]$ et que F et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice III.9. Soient F , G et H trois sev de E avec $G \subset H$. On suppose de plus que $F \cap G = F \cap H$ et que $F + G = F + H$. Montrer que $G = H$.

Exercice III.10. Soit F et G deux sev de E et H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G . Montrer que F et H sont supplémentaires dans $F + G$.

Indications - Solutions

Exercice I.1 : Pour chaque ensemble, on vérifie les deux points : non vide et stable par CL. Si on n'arrive pas à montrer un des points, on essaye de montrer qu'il n'est pas satisfait en donnant par exemple un contre-exemple.

- Oui.
 - Non, par exemple $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1) \in F_2$, mais $(1, 0, 0) + (0, 0, 1) = (1, 0, 1) \notin F_2$.
 - Oui.
 - Oui.
- Non, car $(0, 0, 0, 0) \notin F_1$.
 - Oui.
 - Non, car $(-1, -1, -1, -1) \in F_3$, mais $-(-1, -1, -1, -1) \notin F_3$.
 - Non, car $(\pi, 0, 0, 0) \in F_4$, mais $\frac{1}{2}(\pi, 0, 0, 0) \notin F_3$.
- Oui.
 - Oui.
 - Non car $-e^x$ majoré mais pas e^x .
 - Non, car $0 \notin F_4$.
- Oui.
 - Non, car $0 \notin F_2$.
 - Oui.
 - Oui.
- Oui.
 - Non, car la suite nulle n'est pas dans F_2
 - Oui.
 - Oui.
- Non car la matrice nulle n'est pas inversible.
 - Oui.
 - Oui.
 - Non car la matrice nulle n'est pas dans F_4 .

Exercice I.2 :

- $F_1 = \text{Vect}((2, -1, 0), (-4, 5, 3))$
- $F_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
- $F_3 = \text{Vect}(X^3, X, 1)$
- $F_4 = \text{Vect}((0, 0, 0, 1), (-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0))$
- $F_5 = \text{Vect}(\cos, \sin)$
- $F_6 = \text{Vect}(1, X^3 - 6X^2 + 12X)$

Exercice I.3 : Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, c'est évident car $F \cup G = F$ ou G qui sont tous les deux des sev.

Si $F \cup G$ est un sev, supposons par l'absurde que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Or $x + y \in F \cup G$ car $F \cup G$ est un sev. Mais, si $x + y \in F$, alors $y = (x + y) - x \in F$ ce qui est absurde et si $x + y \in G$ alors $x = (x + y) - y \in G$ ce qui est aussi absurde. Soient F et G deux sev d'un même espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G$ est un sev de E ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice II.1 : On cherche à chaque fois une relation de liaison et on se ramène à un système linéaire.

- Non.
- Oui : $2\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$.
- Non.

Exercice II.2 : On cherche quand le système à paramètre $x(1, t, -1) + y(t, 1, 1) + z(0, t, -t) = (0, 0, 0)$ n'a qu'une seule solution. On trouve que la famille est libre ssi $t \notin \{-1, 0, 2\}$.

Exercice II.3 :

- On prend $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on vérifie que le système $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = (a, b)$ est compatible.
- On fait les trois cas : elle est toujours libre et génératrice de \mathbb{R}^2 .

Exercice II.4 :

- On résout l'équation $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w}$. On trouve $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

III. Sommes de sev

- (b) On prend $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et on résout $a\vec{u} + \beta\vec{v} = (x, y, z)$. On trouve une équation cartésienne : $y + z = 0$ pour que le système soit compatible. En particulier $(0, 1, 1) \notin \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
2. (a) On vérifie que le système $a\vec{u} + \beta\vec{v} = (x, y, z)$ n'est pas toujours compatible.
 (b) On trouve $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
 (c) On utilise l'équation pour tester l'appartenance.
3. On trouve $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t - 2y = 0 \text{ et } z - x - y = 0\}$.

Exercice II.5 :

1. On résout $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \vec{0}$ et on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
2. On résout les systèmes $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = e_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Ainsi $e_1, e_2, e_3 \in \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$, donc $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \subset \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ et la famille est génératrice de \mathbb{R}^3 .
3. On peut utiliser les solutions de la question précédente et on trouve $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice II.6 : On résout le système $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On vérifie qu'il est toujours compatible et que lorsque $a = b = c = d = 0$, la seule solution est nulle. Pour $a = d = 1$ et $b = c = 0$, on trouve $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ et 0 pour les coordonnées de I_2 .

Exercice II.7 : On considère le système $x\vec{u} + y\vec{v} = (\alpha, \beta)$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Or, la famille est une base ssi le système est de Cramer, ssi le déterminant de la matrice est non nul!

Exercice II.8 :

1. On résout le système et on trouve $E_1 = \text{Vect}((2, 1, 0), (-3, 0, 1))$. On vérifie que la famille obtenue est libre.
2. Idem, on obtient $E_2 = \text{Vect}((3, 3/2, 1))$ qui est une droite.
3. On prend $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on calcule AM et MA . On obtient un système de 4 équations à 4 inconnues :
$$\begin{cases} c = b \\ a + b - d = 0 \\ a + c - d = 0 \\ b = c \end{cases} \iff$$
- $\begin{cases} b = c \\ a = d - c \end{cases}$. On a 2 paramètres : $E_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et on vérifie que la famille obtenue est libre.
4. On résout l'équation différentielle en passant par l'équation caractéristique : $X^2 + 2X + 1 = (X + 1)^2 = 0$. Les solutions sont $y(t) = (At + B)e^{-t}$ pour $A, B \in \mathbb{R}$. Donc $E_4 = \text{Vect}(t \mapsto te^{-t}, t \mapsto e^{-t})$ et on vérifie que la famille est libre.

Exercice II.9 :

1. Si $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos x + \mu \sin x = 0$, alors en particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Donc la famille (f, g) est libre.
2. $\sin(x + 2) = \sin x \cos 2 + \sin 2 \cos x$ et $\sin(x + 1) = \sin x \cos 1 + \sin 1 \cos x$. Ainsi, $x \mapsto \sin x, x \mapsto \sin(x + 1), x \mapsto \sin(x + 2) \in \text{Vect}(f, g)$, donc la famille est liée.
3. On écrit une relation de liaison, puis on identifie les coefficients. On trouve que la famille est libre.
4. On suppose que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^N}$. Alors pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$, on a
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
. En résolvant le système, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On pouvait aussi voir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_1 / 2^n + n\lambda_2 / 2^n + \lambda_3 = 0$, donc en prenant la limite, on a $\lambda_3 = 0$. On a ensuite, $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_1 / n + \lambda_2 = 0$ et on reprend la limite pour obtenir $\lambda_2 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.
5. On prend $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels et on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i |x - a_i| = 0$. Si $\lambda_i \neq 0$, alors la fonction à gauche n'est pas dérivable en a_i alors que la fonction nulle est dérivable en a_i . Donc tous les coefficients sont nuls.

Exercice II.10 :

1. Si $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda e^{\alpha_1 x} + \mu e^{\alpha_2 x} + \gamma e^{\alpha_3 x}$, alors en dérivant deux fois et en prenant $x = 0$, on trouve le système
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \gamma = 0 \\ \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \gamma = 0 \\ \alpha_1^2 \lambda + \alpha_2^2 \mu + \alpha_3^2 \gamma = 0 \end{cases}$$
- En résolvant, on trouve que $\lambda = \mu = \gamma = 0$.
2. On prend $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i x} = 0$. Supposons par l'absurde qu'au moins un des coefficients est non nul. Prenons $i_0 = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_k \neq 0\}$. Alors $\lambda_{i_0} = -\sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i e^{(a_i - a_{i_0})x}$. En prenant la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$, le terme de droite tend vers 0, donc $\lambda_{i_0} = 0$: contradiction.
3. On raisonne par récurrence sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ en montrant que $(x \mapsto e^{a_i x})_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ est libre.
- Initialisation : pour $k = 1$, la famille est composée d'un vecteur non nul donc est libre.

III. Sommes de sev

- Hérédité : on prend $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et on suppose que la famille $(x \mapsto e^{a_i x})_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ est libre. Prenons $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e^{a_i x} = 0$. On dérive l'expression précédente par rapport à x pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k+1} a_i \lambda_i e^{a_i x} = 0$. En multipliant la première égalité par a_{k+1} et en soustrayant les deux, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k (a_i - a_{k+1}) \lambda_i e^{a_i x} = 0$. Par HR, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $(a_i - a_{k+1}) \lambda_i = 0$ donc $\lambda_i = 0$ car les a sont tous distincts. Puis, $\lambda_{k+1} = 0$ aussi.

On peut aussi procéder d'une autre façon : on suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{a_i x}$ et en dérivant successivement la somme on trouve $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^m e^{a_i x} = 0$ pour n'importe quel entier $m \geq 0$. Par linéarité, on a donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i P(a_i) e^{a_i x} = 0$ pour n'importe quel polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. On prend les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux a_i pour conclure.

Exercice III.1 :

1. $(1, 0, 0) = (1, 1, 1) - (0, 1, 1) \in F + G$, $(0, 1, 0) \in G \subset F + G$, $(0, 0, 1) = (0, 1, 1) - (0, 1, 0) \in G \subset F + G$.
2. On a $E = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \subset F + G$ par minimalité du Vect. $(0, 1, 2) = (1, 1, 1) - (1, 0, -1) \in F$ et $(0, 1, 2) = 2(0, 1, 1) - (0, 1, 0) \in G$, donc la somme n'est pas directe.

Exercice III.2 : On vérifie les deux conditions facilement. Puis, soit $P \in F \cap \mathbb{K}_1[x]$. Alors P est de degré au plus 1 et a deux racines, donc $P = 0$. Ainsi F et $\mathbb{K}_1[X]$ sont en somme directe. Enfin, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors on fait la DE de P par $(X-1)(X+1) : P = (X-1)(X+1)Q + R$. Or $(X-1)(X+1)Q \in F$ et $R \in \mathbb{K}_1[X]$.

Exercice III.3 : On prend $f \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto ax + b$. De plus, $f(0) = b = 0$ et $f'(0) = a = 0$. Donc $f = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, la somme est directe.

Prenons $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On procède par analyse-synthèse :

- analyse : on suppose que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $g : x \mapsto ax + b$. Donc $h(0) = f(0) + b = b$ et $h'(0) = f'(0) + a = a$. Ainsi $a = h'(0)$ et $b = h(0)$.
- Synthèse : prenons $g : x \mapsto h'(0)x + h(0)$. C'est un élément de G . Puis, on pose $f = h - g$. Vérifions que $f \in F : f(0) = h(0) - h(0) = 0$ et $f'(0) = h'(0) - g'(0) = 0$, donc $f \in F$.

Ainsi, on a bien $h = f + g$ et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice III.4 :

1. Facile, on vérifie les conditions.
2. Soit $(u_n) \in \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{D}$. Comme $(u_n) \in \mathcal{D}$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$. Or $\lim u_n = 0 = C$. Donc (u_n) est la suite nulle et \mathcal{C}_0 et \mathcal{D} sont en somme directe. Puis, si $(u_n) \in \mathcal{C}$, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose $v_n = u_n - \ell$, de sorte que $u_n = v_n + \ell$, et $(v_n) \in \mathcal{C}_0$ et ℓ est une suite constante.

Exercice III.5 :

1. On résout le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$. On trouve $S = \{(-2t - 2z, -t, z, z, t), z, t \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$, donc F et G ne sont pas en somme directe.
2. On résout le système $\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$. On trouve $S = \{(0, 0, 0, 0)\}$, donc F et G sont en somme directe.
3. Les matrices diagonales sont dans l'intersection de F et G .

Exercice III.6 :

1. Soit $f \in P \cap I$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$. Ainsi, $P \cap I = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Pour le reste on fait l'analyse-synthèse bien connue!
2. Prenons $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Alors $M = M^T = -M$, donc $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$. Pour le reste...

Exercice III.7 : Soit $v \in H \cap \text{Vect}(u)$. Alors $v = \lambda u = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. De plus, $\lambda + \lambda + \dots + \lambda = 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi $H \cap \text{Vect}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Prenons $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On raisonne par analyse-synthèse :

- supposons que $v = a + b$ avec $a \in H$ et $b \in \text{Vect}(u)$. Alors $b = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a = (a_1, \dots, a_n)$ vérifie $a_1 + \dots + a_n = 0$. Donc en sommant toutes les coordonnées, on trouve $v_1 + \dots + v_n = n\lambda$, donc $\lambda = \frac{\sum_{k=1}^n v_k}{n}$.
- Posons $\lambda = \frac{\sum_{k=1}^n v_k}{n}$ et $b = \lambda u$. On pose aussi $a = v - b$. On a alors $v = a + b$ et $b \in \text{Vect}(u)$. On vérifie facilement que $a \in H$.

On a bien $\mathbb{R}^n = H \oplus \text{Vect}(u)$.

Exercice III.8 : C'est presque le même exercice que III.2 (avec $A = X^2 - 1$)! On vérifie facilement les conditions pour que F soit un sev. Puis, si $P \in F \cap \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors $P = AQ$ et $\deg(P) < \deg(A)$. Donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Donc $P \cap F = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$. Puis, si $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose la division euclidienne de P par $A : P = AQ + R$. On a $AQ \in F$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On a bien $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{n-1}[X] \oplus F$.

Exercice III.9 : Il suffit de prouver que $H \subset G$. Prenons $x \in H$. Alors $x \in F + H = F + G$, donc il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $x = f + g$. Or $g \in H$ car $G \subset H$, donc $f = x - g \in H$ et $f \in F \cap H = F \cap G$. Donc $x = f + g \in G$. On a bien $H \subset G$.

Exercice III.10 : Prenons $x \in F \cap H$. Or $H \subset G$ donc $x \in F \cap G$ et $x \in H$. Or $F \cap G$ et H sont en somme directe, donc $x = 0_E$. Ainsi, F et H sont en somme directe.

Prenons $u \in F + G$. Il existe $f \in F$ et $g \in G$ tels que $u = f + g$. Comme $G = H \oplus (F \cap G)$, il existe $h \in H$ et $i \in F \cap G$ tels que $g = h + i$. Donc $u = (f + i) + h$. Or $f + i \in F$ et $h \in H$. Donc $F + G = F \oplus H$.