

Dimension - Exercices

Exercice 1. Soit E un \mathbb{K} -ev muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre et la compléter en une base de E .

Exercice 2. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension 4 de base (x_1, x_2, x_3, x_4) . Montrer que $\dim(\text{Vect}(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1)) = 3$.

Exercice 3. Justifier que la famille $(3, X - 2, 2X^2 + 5X, 3X^3 - X^2 + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ puis déterminer les coordonnées de X dans cette base.

- Exercice 4.**
1. Montrer que $(1 + X^2, 1 - X^2)$ est une famille libre puis la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 2. On considère les vecteurs $f_1 = (1, 1, -1, 1)$, $f_2 = (1, 1, -1, 2)$, $f_3 = (2, 0, 1, -1)$, $f_4 = (-4, 0, -2, 3)$, $f_5 = (3, 1, 0, -1)$ et $f_6 = (-6, 0, -3, 4)$ et $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$. Extraire de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ une base de F .
 3. Déterminer le rang des familles de \mathbb{R}^4 suivantes :
 - (a) $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 0, -2, 3)$ et $u_4 = (2, 1, 0, -1)$;
 - (b) $u_1 = (2, 3, -3, 4)$, $u_2 = (3, 6, -2, 5)$, $u_3 = (7, 18, -2, 7)$ et $u_4 = (2, 4, -2, 3)$;
 - (c) $u_1 = (1, 0, 2, 3)$, $u_2 = (7, 4, -2, -1)$, $u_3 = (5, 2, 4, 7)$ et $u_4 = (3, 2, 0, 1)$.
 4. Déterminer le rang des familles de \mathbb{C}^3 suivantes (où $m \in \mathbb{R}$) :
 - (a) $\vec{u} = (1 + i, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1 - i, 1)$ et $\vec{w} = (-2, 3 + i, 2 + 2i)$;
 - (b) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-2m, m + 1, m - 1)$ et $\vec{w} = (1, 0, m)$.
 5. Déterminer le rang de la famille $P_1 = X^3 + 2X^2 - X + 1$, $P_2 = -X^3 + 4X^2 + X + 5$, $P_3 = 2X^3 + 2X^2 - 2X$ et $P_4 = -X^3 + X + 1$.

Exercice 5 (E3A MP 2021). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, X(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (A_1, B_1) est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de $\text{Vect}(A_1, B_1)$?
2. Montrer que $\text{Vect}(A_1, B_1) = \text{Vect}(A_2, B_2)$.

Exercice 7 (d'après ENAC 2019). Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} b + c - a & a - b & a - c \\ c - a & a & a - c \\ b - a & a - b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On note $E = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Justifier que E est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E .

Exercice 8. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y - 10z + 9t = 0\}$.

1. Montrer que E est un sev de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer une base de E et une base d'un supplémentaire de E .

Exercice 9. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$.

1. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de E et une base d'un supplémentaire de E .

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que \mathcal{C} est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base et la dimension de \mathcal{C} .

Exercice 11. Soient $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- Déterminer le rang de la famille (u, v, w) .
- Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
 - Montrer que G est un sev de \mathbb{R}^3 et déterminer sa dimension.
 - En déduire que $G = \text{Vect}(u, v, w)$.
- Soit h un vecteur de \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à G .
 - Quelle est la dimension de $\text{Vect}(h)$?
 - Déterminer $G \cap \text{Vect}(h)$.
 - En déduire que G et $\text{Vect}(h)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 12. 1. Soit F le sev de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 0)$ et G le sev engendré par $(1, 1, 1)$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

- Dans \mathbb{R}^4 , on considère $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 1, 1, 3)$, $w = (2, 1, 1, 1)$, $x = (-1, 0, -1, 2)$ et $y = (2, 3, 0, 1)$.
Soient $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.
Quelles sont les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$?

Exercice 13. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ de \mathbb{R}^4 .

- $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
- $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
- $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
- $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 14. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension 3, F, G et H trois sev de E tels que $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = \dim(H) = 2$.

- Montrer que soit F est inclus dans G , soit F et G sont supplémentaires dans E .
- Montrer que soit $G = H$, soit $G \cap H$ est une droite de E .

Exercice 15. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et F et G deux sev tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 16. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$. Démontrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 18. Soit $n \geq 1$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $n + 1$ éléments distincts de \mathbb{K} .

- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

- Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base \mathcal{L} .

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminer les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.