Dénombrement - Exercices

Exercice 1. Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis, et 16 personnes ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Exercice 2. Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E. On note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Justifier que $A\Delta B$ est fini et déterminer son cardinal en fonction de ceux de A, B et $A\cap B$.

Exercice 3. Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes, suivies de deux chiffres distincts ? *Exemple : (BAC 07).*

Exercice 4. Dénombrer les anagrammes du mot « camion » puis les anagrammes du mot « ananas ».

Exercice 5. À l'écrit d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Même question sachant que les deux premiers exercices sont obligatoires.

Exercice 6. Pour ouvrir la porte de mon immeuble, j'utilise un code de cinq chiffres distincts. Les chiffres sont identifiables (par exemple grâce aux traces de doigts...). À raison d'un essai toutes les trente secondes, quel temps un cambrioleur mettra-t-il au maximum pour ouvrir ma porte ?

Exercice 7. On souhaite écrire un code de 4 chiffres avec les chiffres $1,2,3,4$ et 5. Combien y a-t-il de codes :

1. au total ?
2. avec 2 fois le 1 ?
3. avec 4 chiffres impairs ?
4. avec 4 chiffres différents ?
5. avec 2 fois le 1 et 2 fois le 2 ?
6. avec 4 chiffres dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 8. On tire deux cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de tirages :

1. en tout ?
2. avec au moins un roi ?
3. avec au moins un coeur ?
4. avec au moins un roi ou un coeur ?
5. avec au moins un roi et au moins un coeur ?
6. avec exactement un roi ?

Exercice 9. Soit n et p deux entiers strictement positifs. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjections de $\{1,2,\dots,n+1\}$ dans $\{1,2,\dots,n\}$?

Exercice 11.
1. Calculer les nombres suivants puis vérifier en utilisant le triangle de Pascal :
   (a) $\binom{7}{0}$ (b) $\binom{7}{3}$ (c) $\binom{7}{4}$ (d) $\binom{35}{33}$
2. Simplifier $\dfrac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}$
3. Développer : (a) $(2x-1)^5$ (b) $(a+2b)^4$ (c) $(1-\sqrt{3})^5$
4. Calculer les sommes suivantes : (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k5^{n-k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2k}3^k$

Exercice 12.
1. Un groupe de n personnes souhaite former une équipe de p joueurs avec 1 capitaine. Compter de 2 façons différentes le nombre d'équipe possibles.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}p\binom{n}{p}$.

Exercice 13. Soit E un ensemble de cardinal n. Montrer qu'il y a autant de parties de E qui sont de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Exercice 14.
1. Soit $n\geq 1$. Un tournoi de tennis a $2n$ participants. On note $N(n)$ le nombre de façons d'apparier les joueurs au premier tour. Déterminer une relation entre $N(n)$ et $N(n-1)$ et en déduire l'expression de $N(n)$.
2. Soit E un ensemble de cardinal np avec $n,p\in\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de partitions de E en parties de taille p.

Exercice 15. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $n \leq p+q$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. De combien de façons peut-on choisir simultanément n entiers entre 1 et $p+q$ tels que exactement k d'entre eux sont inférieurs ou égaux à p ?
2. En déduire l'identité de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

Exercice 16. Ma playlist Spotify comprend n morceaux ($n \geq 1$). Ces n morceaux sont en fait p répétitions de mon préféré et $n-p$ répétitions d'un autre. J'écoute ma playlist en mode random.

1. Combien y a-t-il de façons d'écouter ma playlist ?

Je m'arrête d'écouter dès que j'ai écouté toutes les répétitions de mon morceau préféré.

2. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Combien de façons d'écouter ma playlist me permettent de m'arrêter après exactement k morceaux ?
3. En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

Exercice 17.
1. Montrer qu'il existe deux ensembles de 10 entiers dans $[\![1, 100]\!]$ qui ont la même somme.
2. On prend une partie E de $[\![1, 100]\!]$ de cardinal 10. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles non vides et disjoints de E qui ont la même somme.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ non vide tel que $\displaystyle\sum_{i \in I} a_i$ est divisible par n.

Exercice 19. Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties telles que $A \subset B$ (on pourra, par exemple, essayer avec $n = 3$).

Exercice 20. Soit $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 2$), p un entier compris entre 2 et n.

1. Dénombrer les parties de E à p éléments qui contiennent :

   a) x_1 et x_2 b) x_1 mais pas x_2 c) x_2 mais pas x_1 d) Ni x_1 ni x_2

2. En déduire la relation $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$.
3. Retrouver ce dernier résultat par le calcul.

Exercice 21.
1. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\left\{(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3 \mid A \cup B \cup C = E\right\}$$

2. En s'inspirant de la démonstration ensembliste de la formule de Newton, démontrer la formule

$$(a+b+c)^n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n.

1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.
2. On pose $U = \displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(X \cup Y)$, $V = \displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(X \cap Y)$ et $W = \displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{card}(X \cap \overline{Y})$.
   Calculer $U + V$ et $V + W$ et en déduire U, V et W.

Indications - Solutions

Exercice 1 : $55+33-(80-16)=24$
Exercice 2 : $A\Delta B \subset A\cup B$ qui est fini. Donc $A\Delta B$ est fini. De plus, $\mathrm{card}(A\Delta B)=\mathrm{card}(A\cup B)-\mathrm{card}(A\cap B)$ car $A\cap B\subset A\cup B$. Donc $\mathrm{card}(A\Delta B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-2\,\mathrm{card}(A\cap B)$.
Exercice 3 : $26\times 25\times 24\times 10\times 9=1404000$.
Exercice 4 : Pour « camion » : $6!=720$. Pour « ananas » : $\binom{6}{3}\times\binom{3}{2}=60$.
Exercice 5 :

1. $\binom{10}{8}=45$.
2. $\binom{8}{6}=28$.

Exercice 6 : Nombre de combinaisons possibles : $5!=120$. Temps maximum : 1h.
Exercice 7 :

1. $5^4=625$
2. $4^2\binom{4}{2}=96$
3. $3^4=81$
4. $\dfrac{5!}{(5-4)!}=120$
5. $\binom{4}{2}=6$
6. $\binom{5}{4}=5$.

Exercice 8 :

1. $\binom{52}{2}=\dfrac{52\times 51}{2}=1326$.
2. $\binom{52}{2}-\binom{48}{2}=198$.
3. $\binom{52}{2}-\binom{39}{2}=585$.
4. $\binom{52}{2}-\binom{36}{2}=696$.
5. $198+585-696=87$.
6. $\binom{52}{2}-\binom{48}{2}-\binom{4}{2}=192$.

Exercice 9 : Une application strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est injective et est complètement déterminée par son image, qui est une partie de $[\![1,n]\!]$ à p éléments. En effet, pour $\{x_1,\dots,x_p\}\subset[\![1,n]\!]$, on ordonne les éléments de sorte que $x_1<x_2<\cdots<x_p$, et la seule application strictement croissante f correspondante vérifie $f(i)=x_i$ pour $i\in[\![1,p]\!]$. Ainsi, il y a $\binom{n}{p}$ applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 10 : On choisit l'élément de l'arrivée qui a 2 antécédents (n choix), puis on choisit ses deux antécédents ($\binom{n}{2}$ choix), puis on choisit une bijection pour le reste ($(n-1)!$ choix) : $n\times\binom{n+1}{2}\times(n-1)!=\dfrac{n}{2}(n+1)!$.

Exercice 11 :

1. (a) $\binom{7}{0}=1$ (b) $\binom{7}{3}=35$ (c) $\binom{7}{4}=35$ (d) $\binom{35}{33}=595$
2. $\dfrac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}}=\dfrac{n+1}{n+1-p}$
3. (a) $(2x-1)^5=32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$
   (b) $(a+2b)^4=a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4$
   (c) $(1-\sqrt{3})^5=76-44\sqrt{3}$.
4. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k5^{n-k}=8^n$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k=(1+p)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{2k}3^k=13^n$

Exercice 12 :

1. On commence par choisir 1 capitaine (il y a n possibilités), puis on choisit les $p-1$ parmi les $n-1$ restants (il y a $\binom{n-1}{p-1}$). Donc $n\binom{n-1}{p-1}$ équipes possibles.

   On commence par choisir les p joueurs (il y a $\binom{n}{p}$ possibilités), puis on choisit le capitaine parmi les p (il y a p

possibilités). Donc il y a $p\binom{n}{p}$ équipes.

Ainsi, $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$.

2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p-1} = n2^{n-1}$.

Exercice 13 : Le nombre de parties de cardinal pair de E est $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}$ et le nombre de parties de cardinal impair est $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}$. Ainsi, la différence des deux vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0\end{aligned}$$

On a bien autant de parties de cardinal pair que de cardinal impair.

Exercice 14 :

1. Numérotons les joueurs de 1 à $2n$. Pour apparier les joueurs, on choisit l'adversaire du premier joueur parmi les $2n-1$ autres, puis on apparie les $2(n-1)$ restants. Ainsi, $N(n) = (2n-1)N(n-1)$. On a immédiatement $N(n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.
2. On procède de façon analogue. On note $N(n)$ le nombre cherché et numérotons les éléments de E. Pour faire une partition, on commence par mettre le premier élément de E avec $p-1$ autre parmi les $np-1$ restants, puis on prend une partition de $(n-1)p$ éléments en $n-1$ parties à p éléments. On a donc $N(n) = \binom{np-1}{p-1}N(n-1)$.
On obtient alors $N(n) = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{(kp-1)!}{(p-1)!((k-1)p)!} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(kp-1)!}{(k-1)\cdot p!((k-1)p-1)!} = \frac{1}{(p!)^{n-1}(n-1)!}\prod_{k=2}^{n}\frac{(kp-1)!}{((k-1)p-1)!} = \frac{1}{(p!)^{n-1}(n-1)!}\frac{(np-1)!}{(p-1)!} = \frac{1}{(p!)^{n-1}(n-1)!n}\frac{(np-1)!np}{p(p-1)!} = \frac{(np)!}{n!(p!)^n}$.

Exercice 15 :

1. On cherche le nombre de parties A de $[\![1,p+q]\!]$ telles que $\operatorname{card}(A\cap[\![1,p]\!]) = k$ et $\operatorname{card}(A\cap[\![p+1,p+q]\!]) = n-k$. Or l'ensemble de ces parties est en bijection avec $\mathscr{P}_k([\![1,p]\!])\times\mathscr{P}_{n-k}([\![p+1,p+q]\!])$. Donc on a $\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ possibilités.
2. Si on note E_k l'ensemble des parties de $[\![1,p+q]\!]$ à n éléments tels que exactement k soient inférieurs ou égaux à p, alors $\mathscr{P}_n([\![1,p+q]\!]) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}E_k$ et l'union est disjointe. Or $\operatorname{card}(\mathscr{P}_k([\![1,p+q]\!]) = \binom{p+q}{n}$ et d'après la question précédente, $\operatorname{card}(E_k) = \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$. D'où la formule voulue.

Exercice 16 :

1. Un ordre de lecture revient à choisir la position des p répétitions que j'aime. Il y en a donc $\binom{n}{p}$.
2. Un ordre de lecture qui me permet de m'arrêter après k morceaux vérifie que les $k-1$ premiers morceaux contiennent $p-1$ répétitions du préféré, et le k-ième est encore un préféré. Il y a donc $\binom{k-1}{p-1}$ façons d'écouter.
3. L'ensemble de tous les ordres de lecture est l'union disjointe des ordres de lecture permettant de s'arrêter après k morceaux, pour $k\in[\![p,n]\!]$. D'où la formule.

Exercice 17 :

1. La valeur maximale pour la somme de dix entiers entre 1 et 100 est $\displaystyle\sum_{k=91}^{100}k = 955$. Il y a donc au maximum 955 valeurs de sommes différentes lorsqu'on ajoute 10 entiers entre 1 et 100. Or, il y a $\binom{100}{10} = \dfrac{100\times 99\times\cdots\times 91}{10\times 9\times\cdots\times 2} =$

$10\times 11\times 13\times 98\times 97\times 19\times 94\times 31\times 23>955$, donc par le principe des tiroirs, il existe deux ensembles de 10 entiers de $[\![1,100]\!]$ dont les sommes sont égales.

2. De même que précédemment, toutes les sommes possibles des éléments de E ont des valeurs comprises entre 1 et 955. Or, il y a $2^{10}-1=1023$ parties non vides de E. Comme $1023>955$, il existe $A,B\in\mathscr{P}(E)$ non vides avec $A\neq B$ et telles que $\sum_{x\in A}x=\sum_{x\in B}x$. Comme $A\neq B$, $C=A\setminus(A\cap B)\neq\emptyset$ et $D=B\setminus(A\cap B)\neq\emptyset$. De plus, C et D sont disjoints et $\sum_{x\in C}x=\sum_{x\in A}x-\sum_{x\in A\cap B}x=\sum_{x\in B}x-\sum_{x\in A\cap B}x=\sum_{x\in D}x$.

Exercice 18 : L'ensemble $E=\left\{\sum_{i=1}^{k}a_i,k\in[\![1,n]\!]\right\}$ est de cardinal n. Si l'un de ces éléments est divisible par n, il n'y a rien à faire. Sinon, l'ensemble des restes possibles pour la division euclidienne des éléments de E par n est de cardinal $n-1$ (car 0 n'est pas dedans). D'après le principe des tiroirs, il existe donc $k<j\in[\![1,n]\!]$ tels que $\sum_{i=1}^{k}a_i$ et $\sum_{i=1}^{j}a_i$ ont le même reste modulo n. Alors $\sum_{j=k+1}^{j}a_i$ est divisible par n.

Exercice 19 : Si on fixe B, le nombre de A tels que $A\subset B$ est donné par $2^{\operatorname{card}B}$. Donc le nombre total de tels ensembles est $\sum_{B\in\mathscr{P}(E)}2^{\operatorname{card}B}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{B\in\mathscr{P}_k(E)}2^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

Exercice 20 :

1.

$$\text{a) }\binom{n-2}{p-2}\qquad\text{b) }\binom{n-2}{p-1}\qquad\text{c) }\binom{n-2}{p-1}\qquad\text{d) }\binom{n-2}{p}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_p(E)=&\{X\in\mathscr{P}_p(E)\mid x_1\in E\text{ et }x_2\in E\}\cup\{X\in\mathscr{P}_p(E)\mid x_1\in E\text{ et }x_2\notin E\}\cup\{X\in\mathscr{P}_p(E)\mid x_1\notin E\text{ et }x_2\in E\}\\&\cup\{X\in\mathscr{P}_p(E)\mid x_1\notin E\text{ et }x_2\notin E\}\end{aligned}$$

et la réunion est disjointe. Donc $\binom{n}{p}=\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}$.

3.

$$\begin{aligned}\binom{n-2}{p-2}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p}&=\frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}+2\frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!}+\frac{(n-2)!}{p!(n-2-p)!}\\&=\frac{\big(p(p-1)+2p(n-p)+(n-p-1)(n-p)\big)(n-2)!}{p!(n-p)!}\\&=\frac{\big(p^2-p+2pn-2p^2+n^2-np-np-n+p+p^2\big)(n-2)!}{p!(n-p)!}\\&=\frac{(n^2-n)(n-2)!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}.\end{aligned}$$

Exercice 21 :

1. Un fois A choisi de cardinal i ($\binom{n}{i}$ choix), on choisit B de cardinal j ($\binom{n-i}{j}$ choix), et on n'a plus de choix pour C. Donc $\operatorname{card}\left\{(A,B,C)\in\mathscr{P}(E)^3\mid A\cup B\cup C=E\right\}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}=3^n$.

2. Chaque terme du développement de $(a+b+c)^n=(a+b+c)\times(a+b+c)\times\ldots\times(a+b+c)$, correspond à un élément de $F=\left\{(A,B,C)\in\mathscr{P}(E)^3\mid A\cup B\cup C=E\right\}$: A correspond aux numéros des termes du produit pour lesquels on a choisi a, B et C de même. Donc

$$(a+b+c)^n=\sum_{(A,B,C)\in F}a^{\operatorname{card}A}b^{\operatorname{card}B}c^{\operatorname{card}C}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{(A,B,C)\in F,\operatorname{card}A=i,\operatorname{card}B=j}a^ib^jc^{n-i-j}.$$

Or il y a $\binom{n}{i}\times\binom{n-i}{j}$ termes qui valent tous $a^ib^jc^{n-i-j}$ dans la dernière somme.

Exercice 22 :

1. On décompose $\mathscr{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{P}_k(E)$. Donc $S = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in \mathscr{P}_k(E)} \text{card}(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in \mathscr{P}_k(E)} k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. On a ensuite $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geq 1$, donc $S = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$.
2. $U + V = \sum_{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2} \text{card}(X) + \text{card}(Y) = \sum_{Y\in\mathscr{P}(E)} \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \text{card}(X) + \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \sum_{Y\in\mathscr{P}(E)} \text{card}(Y) = 2 \times 2^n \times n2^{n-1} = n4^n$.
   $V + W = \sum_{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2} \text{card}(X) = n2^{4n-1}$.
   Or $W = V$ car $Y \mapsto \overline{Y}$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$.
   Donc $V = W = n4^{n-1}$ et $U = 3n4^{n-1}$.