

## Chapitre 22 : Dimension

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.

### I. Espaces vectoriels de dimension finie

Rappelons la proposition suivante, vue dans le chapitre 20.

**Proposition I.1.** Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $u \in E$ .

1.  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, u) \iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
2. Supposons que  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre. On a  $(u_1, \dots, u_n, u)$  est liée  $\iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ .
3. Supposons que  $(u_1, \dots, u_n, u)$  est génératrice de  $E$ . On a  $(u_1, \dots, u_n)$  est génératrice de  $E \iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ .

#### I.1. Dimension finie

**Définition I.1.** On dit que le  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie de  $E$ . Sinon,  $E$  est de dimension infinie.

**Exemples I.1.** •  $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X]$  sont de dimension finie.

- $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  sont de dimension infinie.

#### I.2. Existence d'une base

##### Théorème I.2 (Théorème de la base extraite)

Soit  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  une famille génératrice finie de  $E$  non nul. Alors il existe une sous-famille  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$  qui est une base de  $E$ .

**Corollaire I.3.** Tout espace vectoriel de dimension finie non nul admet une base.

##### Théorème I.4 (Théorème de la base incomplète)

Soit  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille libre de  $E$  et  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  une famille génératrice finie de  $E$ . Alors on peut compléter  $\mathcal{F}$  avec des éléments de  $\mathcal{G}$  pour obtenir une base de  $E$ .

##### Théorème I.5 (Lemme de Steinitz)

Soit  $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ . Toute famille de vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est liée.

##### Théorème I.6

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie non nul. Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille libre,  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_m)$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Alors  $p \leq n \leq m$ .

En particulier, toutes les bases de  $E$  ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé **dimension de  $E$**  et noté  $\dim E$ .

**Corollaire I.7.** Si  $E$  est de dimension  $n$  :

- toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base;
- toute famille génératrice de  $E$  de  $n$  vecteurs est une base;

*Remarque I.1.* Par convention, on pose  $\dim\{0\} = 0$ .

**Exemples I.2.** •  $\dim \mathbb{K}^n = n$  et  $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$ .

- $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$ .
- Un espace vectoriel de dimension 1 est appelé **droite vectorielle**.
- Un espace vectoriel de dimension 2 est appelé **plan vectoriel**.

## II. Dimension d'un sous-espace vectoriel

### II.1. Dimension d'un sev

**Proposition II.1.** 1. Les sev de  $E$  de dimension 1 sont les sev de la forme  $\text{Vect}(x)$  avec  $x \in E \setminus \{0_E\}$ .  
2. Les sev de  $E$  de dimension 2 sont les sev de la forme  $\text{Vect}(x, y)$  avec  $(x, y)$  une famille libre.

**Exemples II.1.** 1. L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre 1 est un ev de dimension 1.  
2. L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un ev de dimension 2.  
3. L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un ev de dimension 2.

**Définition II.1.** Un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $\dim(E) - 1$  est un **hyperplan** de  $E$ .

**Proposition II.2.** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un sev de  $E$ . Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ . De plus,  $\dim F = \dim E$  ssi  $E = F$ .

### II.2. Dimension d'une somme directe

**Proposition II.3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $F$  et  $G$  deux sev de dimension finie. Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $F$  et  $(f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $G$ , alors  $F$  et  $G$  sont en somme directe ssi la famille  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est libre. Dans ce cas,  $F \oplus G$  est de dimension finie et :

$$\dim F \oplus G = \dim F + \dim G.$$

On dit alors que  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une **base adaptée** à la somme directe  $F \oplus G$ .

*Remarque II.1.* En particulier,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires ssi  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  est une base de  $E$ . Dans ce cas,  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

**Proposition II.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F$  un sev. Alors  $F$  admet un supplémentaire  $G$  dans  $E$ .

### II.3. Dimension d'une somme

#### **Théorème II.5 (Formule de Grassmann)**

Soient  $F$  et  $G$  deux sev de dimensions finies d'un  $\mathbb{K}$ -ev. Alors  $F + G$  et  $F \cap G$  sont de dimension finie et :

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

**Corollaire II.6.** Soient  $F$  et  $G$  deux sev d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension finie. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $E = F \oplus G$ ;
2.  $\dim E = \dim F + \dim G$  et  $F \cap G = \{0_E\}$ ;
3.  $\dim E = \dim F + \dim G$  et  $E = F + G$ .

### III. Rang d'une famille finie de vecteurs

**Définition III.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Le **rang** de la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $E$  est la dimension du sev engendré par ces vecteurs :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$$

**Proposition III.1.** Soit  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  de dimension  $n$ .

- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$  et  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$  ssi la famille est libre.
- $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq n$  et  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$  ssi  $(u_1, \dots, u_p)$  est génératrice de  $E$ .
- Si  $\mathcal{F}'$  est une sous-famille libre de  $\mathcal{F}$  de cardinal  $m$ , alors  $\text{rg}(\mathcal{F}') \geq m$ .