

Colles 24 - 06/04/2026 au 10/04/2026**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 20 : Espaces vectoriels.
Exercices traités en classe : I.1, I.2, I.3, II.1, II.4, II.5, II.8, II.9, III.1, III.2, II.10, III.3, III.4, III.5, III.7, III.8.
- Chapitre 21 : Dénombrement.
 1. Cardinal d'un ensemble fini, cardinal d'une partie.
 2. Injectivité/surjectivité/bijektivité et cardinal.
 3. Cardinal d'une union, du complémentaire, du produit cartésien.
 4. Nombre d'applications de E dans F .
 5. Nombre de p -listes, de p -arrangements, de permutations.
 6. Nombre de p -combinaisons, retour sur les coefficients binomiaux.**Exercices traités en classe :** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 17, 20.
- Chapitre 22 : Dimension.
 1. Dimension finie : définition, théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.
 2. Lemme de Steinitz, cardinal d'une famille libre/base/génératrice.
 3. Rang d'une famille finie de vecteurs.
 4. Dimension d'un sev.
 5. Dimension d'une somme directe, formule de Grassmann.
 6. Existence d'un supplémentaire en dimension finie, caractérisation avec la dimension.

Pas d'exercices sur ce chapitre**Questions de cours****Question 1**

- Exemples du cours :
 1. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On pose pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)}$. Montrer que (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
 2. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- C20 Exercice II.8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
 1. Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 2. Déterminer une base de F .
- C20 Exercice II.9 : soit $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \cos(x)$. Montrer que (f, g) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Définition de la somme de deux sev et de somme directe. Montrer que la somme de deux sev est un sev.
- Donner la définition de famille libre et famille génératrice. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ base de F et $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_p)$ base de G . Donner les conditions sur \mathcal{F} et \mathcal{G} pour que F et G soient en somme directe/supplémentaires.
- Montrer que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
- Définition de supplémentaires. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Définition de p -listes, de p -arrangements et de p -combinaisons. Donner les formules. Justifier la formule pour les p -combinaisons à l'aide du principe des bergers.
- C21 Exercice 14 : soit $n \geq 1$. Un tournoi de tennis a $2n$ participants. On note $N(n)$ le nombre de façons d'apparier les joueurs au premier tour. Déterminer une relation entre $N(n)$ et $N(n-1)$ (lorsque $n \geq 2$) et en déduire l'expression de $N(n)$ en fonction de n .
- C21 Exercice 15 : soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $n \leq p + q$. Montrer l'identité de Vandermonde : $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$ en comptant de deux façons différentes le nombre de manières de choisir n entiers dans $\llbracket 1, p+q \rrbracket$.

- C21 Exercice 17 : soit E une partie de $\llbracket 1, 100 \rrbracket$ de cardinal 10. Montrer qu'il existe deux parties non vides et disjointes de E qui ont la même somme.
- C21 Exercice 20 : établir la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$ en comptant les parties à p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de deux façons différentes.
- Donner la définition de dimension finie et énoncer le théorème de la base incomplète. Montrer que tout sev d'un \mathbb{K} -ev de dimension finie admet un supplémentaire.
- Rappeler la définition du rang d'une famille de vecteurs. Si (u_1, \dots, u_p) est une famille de vecteurs de E de dimension n , montrer que
 1. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p \iff (u_1, \dots, u_p)$ est libre;
 2. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n \iff (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E .

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Condition pour rajouter un vecteur à un Vect sans changer le Vect.
 - ▷ Condition nécessaire et suffisante pour rajouter un vecteur à une famille libre et rester libre.
 - ▷ Famille de polynômes échelonnés en degrés.
 - ▷ Condition nécessaire et suffisante pour que F et G soient en somme directe.
 - ▷ Si $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $G = \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_n)$, conditions suffisantes sur (u_1, \dots, u_n) pour que $F + G = E$, F et G soient en somme directe et $F \oplus G = E$.
 - ▷ Principe des tiroirs.
 - ▷ Cardinal d'une union.
 - ▷ Principe des bergers.
 - ▷ Cardinal d'un produit cartésien.
 - ▷ Nombre d'applications de E dans F .
 - ▷ Nombre d'arrangements.
 - ▷ Nombre de permutations.
 - ▷ Nombre de combinaisons.
 - ▷ Formules sur les coefficients binomiaux.
 - ▷ Théorème de la base extraite.
 - ▷ Théorème de la base incomplète.
 - ▷ Lemme de Steinitz.
 - ▷ Condition sur le cardinal pour qu'une famille libre/génératrice soit une base.
 - ▷ Dimension d'une somme (formule de Grassmann).
 - ▷ Supplémentaires et dimension.
 - ▷ Rang d'une famille libre/génératrice.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une partie d'un \mathbb{K} -ev est un sev.
2. Savoir vérifier qu'une famille est libre/liée, génératrice ou non, une base ou non.
3. Savoir écrire un sev comme un Vect pour trouver une base.
4. Savoir montrer que deux sev sont en somme directe.
5. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires avec une analyse-synthèse.
6. Connaître les formules de dénombrement.
7. Savoir modéliser une situation de dénombrement par des tirages successifs avec/sans remise ou simultanés.