Chapitre 23 : Probabilités

I. Univers

I.1. Expériences aléatoires

On parle d'**expérience aléatoire** lorsque, en reproduisant l'expérience dans des conditions aussi semblables que possibles, le résultat de l'expérience ne peut pas être prédit. Généralement, en répétant l'expérience de nombreuses fois, on voit apparaître une certaine régularité dans les résultats : les fréquences d'apparition des différentes issues de l'expérience tendent à se stabiliser.
Le but de la théorie des probabilités est de définir des modèles permettant de prédire non pas un résultat précis d'une expérience mais le comportement statistique de ses résultats.

Définition I.1. On appelle **issue/éventualité/réalisation** un résultat de l'expérience aléatoire.
L'ensemble de toutes les issues possibles est l'**univers** de l'expérience aléatoire, noté généralement Ω.

Cette année, on ne s'intéresse qu'aux expériences aléatoires dont le nombre d'issues est fini.

I.2. Évènements

Définition I.2.
- Un **évènement** d'une expérience aléatoire est une partie de son univers Ω.
  L'ensemble de tous les évènements est donc $\mathscr{P}(\Omega)$.
- Les singletons de Ω sont appelés les **évènements élémentaires**.
- L'évènement Ω est l'**évènement certain** et l'évènement $\emptyset$ est l'**évènement impossible**.
- Pour tous évènements $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, l'évènement $A \cup B$ est l'évènement « **A ou B** » et l'évènement $A \cap B$ est l'évènement « **A et B** ». L'évènement $\overline{A}$ est l'évènement **contraire** de A.
- On dit que A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$: il n'y a pas d'issue qui réalise à la fois A et B.
- On appelle **système complet d'évènements** de Ω toute famille d'évènements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ deux à deux incompatibles et dont la réunion est l'évènement certain :
  1. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$;
  2. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Remarque I.1. Si A est un évènement , alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements.
Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, alors $(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\})$ est un système complet d'évènement.

II. Espaces probabilisés finis

II.1. Probabilité

Définition II.1. Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :
1. $P(\Omega) = 1$;
2. Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini** (EPF).
Pour tout évènement A, on appelle **probabilité de** A le réel $P(A) \in [0,1]$.

Proposition II.1. *Soit (Ω, P) un EPF et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements deux à deux incompatibles. Alors*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Remarque II.1. En particulier, si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$: la probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de ses évènements élémentaires. Ainsi, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, alors $P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_n\}) = 1$.

Définition II.2. Soit Ω un ensemble fini. On appelle **distribution de probabilités** sur Ω une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Théorème II.2

Soit Ω un univers fini et $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilités. Alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que : $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$.
Autrement dit, la donnée des probabilités des évènements élémentaires détermine complètement la probabilité de tous les évènements.

II.2. Probabilité et évènements

Proposition II.3. *Soit (Ω, P) un EPF et $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux évènements.*

1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
3. *si* $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$;
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$;
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque II.2. Un évènement A tel que $P(A) = 0$ est dit **négligeable**. Attention, un évènement négligeable n'est pas forcément $\varnothing$.

II.3. Probabilité uniforme

Définition II.3. Soit Ω un univers fini. La probabilité pour laquelle tous les évènements élémentaires ont la même probabilité $\dfrac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$ est la **probabilité uniforme sur** Ω. On dit qu'on est en situation d'**équiprobabilité**.

Proposition II.4. *Si P est la probabilité uniforme sur Ω, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(A) = \dfrac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$.*

III. Probabilités conditionnelles

III.1. Définition

Soit (Ω, P) un EPF. Si on fait l'hypothèse qu'un certain évènement B est réalisé, cela modifie *a priori* les chances d'apparition d'un évènement A. Par exemple, si on suppose que B est réalisé, alors B est réalisé avec probabilité 1 et $\overline{B}$ avec probabilité 0.
L'hypothèse faîte définit ainsi une nouvelle probabilité sur Ω appelée **probabilité conditionnelle sur Ω sachant** B et notée P_B.
Par exemple, lorsqu'on lance un dé équilibré à 6 faces, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ est muni de la probabilité uniforme. Si on suppose que $B = \{2, 4, 6\}$ (on obtient un résultat pair) est réalisé, quelle est la probabilité d'obtenir 4 ? Réponse : $P_B(\{4\}) = \dfrac{1}{3}$.

Définition III.1. Soit $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ un évènement tel que $P(B) \neq 0$. Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B est

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque III.1. Si on connait $P(B)$ et $P_B(A)$, on retrouve $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$.

> **Proposition III.1.** *Soit (Ω, P) un EPF et B un évènement avec $P(B) \neq 0$. Alors l'application $P_B : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ est une probabilité.*

Remarque III.2. Comme P_B est une probabilité, elle vérifie les propriétés des probabilités vues au paragraphe II, avec en plus la propriété que $P_B(B) = 1$.
En particulier, lorsque P est la probabilité uniforme, alors $P_B(A) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$.

III.2. Formules

Théorème III.2 (Formule des probabilités composées)

Soient (Ω, P) un EPF et $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

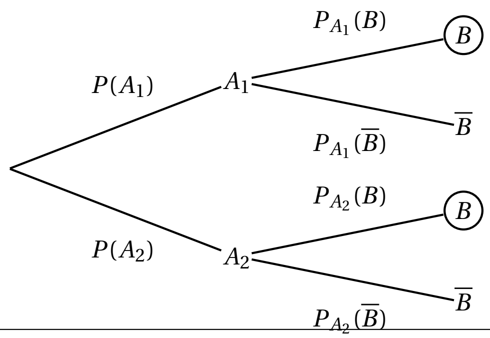
Remarques III.3.
1. En représentant la situation par un arbre, la formule dit que la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur chaque branche du chemin.
2. Si une des probabilités $P(A_1 \cap \ldots A_k)$ $(k < n-1)$ est nulle, alors $P(A_1 \cap \ldots A_{n-1})$ est nulle par croissance. Donc l'hypothèse faîte suffit pour que la formule ait un sens.

Théorème III.3 (Formule des probabilités totales)

Soient (Ω, P) un EPF et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'évènements.

1. *Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$.*
2. *Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ et en posant par convention $P_{A_i}(B)P(A_i) = 0$ si $P(A_i) = 0$, on a $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$.*

Remarque III.4. On peut représenter la situation par un arbre de probabilité. Cette formule dit simplement que la probabilité d'obtenir B est la somme des probabilités des chemins menant à B. Ici, $n = 2$.



Théorème III.4 (Formule de Bayes)

Soient (Ω, P) un EPF et B un évènement tel que $P(B) > 0$.

1. *Pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, si $P(A) > 0$, alors $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.*
2. *Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P_B(A_j) = \dfrac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)}$.*

III.3. Indépendance

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de A ne dépend pas de celle de B. Lorsque $P(B) > 0$, on peut dire que $P_B(A) = P(A)$, ce qui revient à $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ceci suggère la définition suivante dans le cas général.

Définition III.2. Soit (Ω, P) un EPF.

1. On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
2. On dit que les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de $[\![1, n]\!]$, $P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Remarque III.5.

- Attention à ne pas confondre indépendants et incompatibles. En effet, deux évènements incompatibles ne sont indépendants que si au moins l'un d'entre eux est négligeable.
- Si les A_i sont mutuellement indépendants, alors pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants (en prenant $I = \{i, j\}$). Par contre la réciproque est fausse. Ainsi, pour montrer que des évènements sont mutuellements indépendants, il y a beaucoup d'égalités $(2^n - n - 1)$ à vérifier.

Proposition III.5. *Soient (Ω, P) un EPF et A, B deux évènements indépendants. Alors*

- *A et $\overline{B}$ sont indépendants ;*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants ;*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants ;*

Proposition III.6. *Soit (Ω, P) un EPF et $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'évènements. Soit $(B_1, \dots, B_n)$ une famille d'évènements tels que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$.*
Si les évèmenents $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors les évènements $B_1, \dots, B_n$ aussi.