

## Applications linéaires - Exercices

### I. Linéarité, noyau, image

**Exercice I.1.** Dans chacun des cas suivants, l'application  $f$  est-elle linéaire?

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. <math>f(x, y) = (x + 2y, -x - y)</math></p> <p>2. <math>f(x, y, z, t) = (x - 2z, 3t, x + y + t)</math></p> | <p>3. <math>f(x, y, z) = (z + y, xy, x)</math></p> <p>4. <math>f(x, y, z) = (x + y, z, 1 + y + z)</math></p> |
|--|--|

**Exercice I.2.** 1. Soit  $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ . Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

2. Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide de l'application  $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi(f) = f(1) - f(0)$ .

**Exercice I.3.** Dans chacun des cas suivants, montrer que  $\varphi$  est linéaire.

- |  |  |
|--|--|
| <p>1. <math>\varphi : \begin{cases} \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) &amp; \rightarrow &amp; \mathbb{R} \\ f &amp; \mapsto &amp; f(0) \end{cases}</math></p> <p>2. <math>\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}[X] &amp; \rightarrow &amp; \mathbb{C}[X] \\ P &amp; \mapsto &amp; P' \end{cases}</math></p> <p>3. <math>\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &amp; \rightarrow &amp; \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &amp; \mapsto &amp; (u_0, u_1, u_2) \end{cases}</math></p> | <p>4. <math>\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &amp; \rightarrow &amp; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &amp; \mapsto &amp; AM - MA \end{cases}</math>, où <math>A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})</math> est fixée.</p> <p>5. <math>\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] &amp; \rightarrow &amp; \mathbb{R}[X] \\ P &amp; \mapsto &amp; R \end{cases}</math>, où <math>R</math> est le reste de la division euclidienne de <math>P</math> par <math>X^2 + 1</math>.</p> |
|--|--|

**Exercice I.4.** Montrer que les applications suivantes sont linéaires, puis en déterminer le noyau et l'image.

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. <math>f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 &amp; \rightarrow &amp; \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &amp; \mapsto &amp; (4x, y - x, 2x + y) \end{cases}</math></p> | <p>2. <math>g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 &amp; \rightarrow &amp; \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &amp; \mapsto &amp; (2x + y - z, x - y) \end{cases}</math></p> |
|--|---|

**Exercice I.5.** Soit  $u : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  qui à la fonction  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  associe la fonction  $u(f) : x \mapsto xf(x)$ . Montrer que  $u$  est linéaire puis étudier son injectivité et sa surjectivité.

**Exercice I.6.** 1. Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

(a) Montrer que  $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .

(b) Montrer que  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im } f \subset \ker g$ .

2. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0$ .

(a) Montrer que  $f$  est un automorphisme.

(b) Montrer que  $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \ker(f - 2\text{id}_E)$  et  $\text{Im}(f - 2\text{id}_E) \subset \ker(f - \text{id}_E)$ .

(c) Montrer que  $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$ .

**Exercice I.7.** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que :  $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$ .

2. Montrer que :  $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2) \iff \ker(u) + \text{Im}(u) = E$ .

**Exercice I.8.** Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  qui commutent. Montrer que  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .

**Exercice I.9.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F, G$  deux sev de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

$$u(F) = u(G) \iff F + \ker(u) = G + \ker(u).$$

**Exercice I.10.** 1. Pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on définit  $\phi(P) = XP' - P$ .

(a) Vérifier que  $\phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

(b) Déterminer le noyau et l'image de  $\phi$ .

(c) Vérifier que  $\ker(\phi) \oplus \text{Im}(\phi) = \mathbb{R}_2[X]$ .

(d) Est-ce que  $\phi$  est un projecteur? une symétrie?

2. Pour tout  $P \in \mathbb{R}_3[X]$ , on définit  $f(P) = P + (1 - X)P'$ .

(a) Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

(b) Déterminer le noyau de  $f$ .

## II. Homothéties, projecteurs, symétries

**Exercice II.1.** 1. Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On note  $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ ,  $D = \text{Vect}(\vec{v})$  et  $P = \ker(f)$ , où  $f$  est la forme linéaire définie sur  $E$  par  $f(x, y, z) = x + 2y - z$ .

- Montrer que  $P$  et  $D$  sont en somme directe.
- Justifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.
- Déterminer l'expression des projections  $\pi_{D,P}$  et  $\pi_{P,D}$ .

2. Soient  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$  et  $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\}$ .

- Montrer que  $F$  et  $G$  sont deux sev supplémentaires de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- Déterminer le projeté du polynôme  $X^2 + X + 1$  sur  $F$  parallèlement à  $G$ , puis son symétrique par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

**Exercice II.2.** 1. Soit  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $p(x, y, z) = (-5x + 10y - 10z, -6x + 11y - 10z, -3x + 5y - 4z)$ .

- Montrer que  $p$  est linéaire.
- Montrer que  $p$  est une projection sur un sev  $F$  parallèlement à un sev  $G$  et déterminer  $F$  et  $G$ .

2. Soit  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $s(x, y, z) = (x, -2x + y + 2z, 2x - z)$ .

- Montrer que  $s$  est linéaire.
- Montrer que  $s$  est une symétrie par rapport à un sev  $F$  parallèlement à un sev  $G$  et déterminer  $F$  et  $G$ .

**Exercice II.3.** 1. Soit  $n \geq 1$ . Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  en utilisant une symétrie bien choisie.

2. Soit  $I = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est impaire}\}$  et  $P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est paire}\}$ . En utilisant une symétrie, montrer que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P \oplus I$ .

**Exercice II.4.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $p = \frac{1}{2}(\text{id}_E + f)$ . Montrer que  $p$  est un projecteur ssi  $f$  est une symétrie.

**Exercice II.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $x \in \ker(f - \lambda \text{id}_E) \iff f(x) = \lambda x$ .
- On pose  $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}_E)$ . Justifier que  $E_\lambda$  est stable par  $f$ .
- Que dire de  $f|_{E_\lambda}$  ?

**Exercice II.6.** Soit  $p$  un projecteur de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que si  $u \circ p + p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $u \circ p = p \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exercice II.7.** Soit  $p, q \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $p \circ q = p$  et  $q \circ p = q$ . Montrer que  $p$  et  $q$  sont deux projecteurs de même noyau.

## III. Dimension finie

**Exercice III.1.** Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par  $f(P) = XP - P'$ .

- Montrer que  $f$  est linéaire.
- Donner une base de  $\text{Im}(f)$  et de  $\ker(f)$ .
- $f$  est-elle injective? surjective?
- Reprendre les questions avec  $\phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  définie par  $\phi(P) = (X + 1)P - (X^2 - 1)P'$ .

**Exercice III.2.** Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $J(P) = P(X + 1) - P(X)$  et  $L(P) = XP' - 2P$ .

- Montrer que  $J$  est une application linéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $L$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- Déterminer  $\ker(J)$  et  $\text{Im}(J)$ .
- Déterminer  $\text{Im}(L)$ , puis  $\text{rg}(L)$ ,  $\dim(\ker(L))$  et enfin  $\ker(L)$ .

**Exercice III.3.** Montrer que l'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (z, x - y, y + z)$  est un automorphisme.

**Exercice III.4.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 3,  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit l'application  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  par  $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$ ,  $\varphi(e_2) = e_1 - e_2$  et  $\varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3$ .

- Soit  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ . Exprimer  $\varphi(u)$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .
- Comment choisir  $\lambda$  pour que  $\varphi$  soit injective? surjective?

**Exercice III.5.** Soit  $E$  l'ensemble des suites à valeurs réelles  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n$ .

- Montrer que  $E$  est un sev de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

### III. Dimension finie

2. Montrer que l'application  $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$  est un isomorphisme.
3. En déduire la dimension de  $E$  puis une base de  $E$ .

**Exercice III.6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels distincts. On définit l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par :  $\phi(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$ .

1. Justifier que  $\phi$  est linéaire.
2. Montrer que  $\phi$  est un isomorphisme.
3. En déduire que pour tout  $(n+1)$ -uplet  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  de réels, il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $P(a_0) = b_0, P(a_1) = b_1, \dots, P(a_n) = b_n$ .

**Exercice III.7.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $f$  est nilpotent et on pose  $p$  le plus petit entier naturel tel que  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. Montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que la famille  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre.
2. Comparer  $n$  et  $p$  et en déduire que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

**Exercice III.8.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que :  $\forall x \in E, \exists p \in \mathbb{N}^* \mid u^p(x) = 0_E$ . Montrer que  $u$  est nilpotent.

**Exercice III.9.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que :  $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda x$ .

On veut montrer que  $f$  est une homothétie. Pour cela, on prend  $x_0 \in E$  un vecteur non nul et  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x_0) = \lambda_0 x_0$ .

1. Que doit-on montrer ?
2. Soit  $y \in E$  tel que  $(x_0, y)$  est liée. Déterminer  $f(y)$ .
3. Soit  $y \in E$  tel que  $(x_0, y)$  est libre. Montrer que  $f(y) = \lambda_0 y$ .
4. Conclure.

**Exercice III.10.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  une forme linéaire sur  $E$ . On prend  $a \in E$  tel que  $f(a) \neq 0$ .

1. Montrer que  $E = \ker(f) \oplus \text{Vect}(a)$ .
2. On suppose que  $f(a) = 1$  et on pose pour tout  $x \in E, p(x) = f(x)a$ .  
Montrer que  $p$  est un projecteur de  $E$  et déterminer ses éléments caractéristiques.

**Exercice III.11.** Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$  est un hyperplan de  $\mathbb{C}_n[X]$  et en déterminer une base.

**Exercice III.12.** Soit  $a \in \mathbb{K}$  et  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ .

1. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$  une forme linéaire telle que pour tout  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \varphi((X-a)P) = 0$ .  
Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X], \varphi(P) = \lambda P(a)$ .
2. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K})$  une forme linéaire telle que pour tout  $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X], \varphi((X-a)^2 P) = 0$ .  
Montrer qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{K}_n[X], \varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$ .

**Exercice III.13.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$  une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = \text{tr}(AM)$ .

**Exercice III.14.** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que  $\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ .

**Exercice III.15 (Mines-Ponts PC 2018).** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  tels que

$$f + g = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim(E).$$

1. Montrer que  $\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$ .
2. Justifier que  $f \circ g = g \circ f$  et en déduire que :  $\forall x \in E, f \circ g(x) = 0$
3. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des projecteurs.

**Exercice III.16 (CCP PSI 2018).** Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$  définie par  $\varphi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$ .

1. Comparer le degré de  $P$  avec celui de  $\varphi(P)$ .
2. Déterminer le noyau de  $\varphi$ .
3. Étudier la surjectivité de  $\varphi$ .

**Exercice III.17 (Mines-Ponts PC 2018).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0 \right\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sev de  $\mathbb{R}_n[X]$  et déterminer sa dimension.
2. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Déterminer  $A \cap \text{Vect}(1, (X-1)^k)$ .
3. Donner une base de  $A$ .

**Exercice III.18 (X PC 2018).** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Montrer que  $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \iff E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$ .