

Dimension - Exercices

Exercice 1. Soit E un \mathbb{K} -ev muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $f_2 = e_2 + e_3$. Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre et la compléter en une base de E .

Exercice 2. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension 4 de base (x_1, x_2, x_3, x_4) . Montrer que $\dim(\text{Vect}(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1)) = 3$.

Exercice 3. Justifier que la famille $(3, X - 2, 2X^2 + 5X, 3X^3 - X^2 + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ puis déterminer les coordonnées de X dans cette base.

- Exercice 4.**
1. Montrer que $(1 + X^2, 1 - X^2)$ est une famille libre puis la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
 2. On considère les vecteurs $f_1 = (1, 1, -1, 1)$, $f_2 = (1, 1, -1, 2)$, $f_3 = (2, 0, 1, -1)$, $f_4 = (-4, 0, -2, 3)$, $f_5 = (3, 1, 0, -1)$ et $f_6 = (-6, 0, -3, 4)$ et $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$. Extraire de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ une base de F .
 3. Déterminer le rang des familles de \mathbb{R}^4 suivantes :
 - (a) $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (0, 1, 2, -1)$, $u_3 = (1, 0, -2, 3)$ et $u_4 = (2, 1, 0, -1)$;
 - (b) $u_1 = (2, 3, -3, 4)$, $u_2 = (3, 6, -2, 5)$, $u_3 = (7, 18, -2, 7)$ et $u_4 = (2, 4, -2, 3)$;
 - (c) $u_1 = (1, 0, 2, 3)$, $u_2 = (7, 4, -2, -1)$, $u_3 = (5, 2, 4, 7)$ et $u_4 = (3, 2, 0, 1)$.
 4. Déterminer le rang des familles de \mathbb{C}^3 suivantes (où $m \in \mathbb{R}$) :
 - (a) $\vec{u} = (1 + i, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1 - i, 1)$ et $\vec{w} = (-2, 3 + i, 2 + 2i)$;
 - (b) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-2m, m + 1, m - 1)$ et $\vec{w} = (1, 0, m)$.
 5. Déterminer le rang de la famille $P_1 = X^3 + 2X^2 - X + 1$, $P_2 = -X^3 + 4X^2 + X + 5$, $P_3 = 2X^3 + 2X^2 - 2X$ et $P_4 = -X^3 + X + 1$.

Exercice 5 (E3A MP 2021). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, X(X - 1), \dots, X^{n-1}(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (A_1, B_1) est une famille libre de $M_2(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de $\text{Vect}(A_1, B_1)$?
2. Montrer que $\text{Vect}(A_1, B_1) = \text{Vect}(A_2, B_2)$.

Exercice 7 (d'après ENAC 2019). Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} b + c - a & a - b & a - c \\ c - a & a & a - c \\ b - a & a - b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On note $E = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Justifier que E est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et déterminer une base et la dimension de E .

Exercice 8. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y - 10z + 9t = 0\}$.

1. Montrer que E est un sev de \mathbb{R}^4 .
2. Déterminer une base de E et une base d'un supplémentaire de E dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 9. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$.

1. Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de E et une base d'un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que \mathcal{C} est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base et la dimension de \mathcal{C} .

Exercice 11. Soient $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- Déterminer le rang de la famille (u, v, w) .
- Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
 - Montrer que G est un sev de \mathbb{R}^3 et déterminer sa dimension.
 - En déduire que $G = \text{Vect}(u, v, w)$.
- Soit h un vecteur de \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à G .
 - Quelle est la dimension de $\text{Vect}(h)$?
 - Déterminer $G \cap \text{Vect}(h)$.
 - En déduire que G et $\text{Vect}(h)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 12. 1. Soit F le sev de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 0)$ et G le sev engendré par $(1, 1, 1)$. Déterminer $F \cap G$ et $F + G$.

- Dans \mathbb{R}^4 , on considère $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, 1, 1, 3)$, $w = (2, 1, 1, 1)$, $x = (-1, 0, -1, 2)$ et $y = (2, 3, 0, 1)$. Soient $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$. Quelles sont les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$?

Exercice 13. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ de \mathbb{R}^4 .

- $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
- $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
- $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
- $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?

Exercice 14. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension 3, F, G et H trois sev de E tels que $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = \dim(H) = 2$.

- Montrer que soit F est inclus dans G , soit F et G sont supplémentaires dans E .
- Montrer que soit $G = H$, soit $G \cap H$ est une droite de E .

Exercice 15. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et F et G deux sev tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 16. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \geq 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E . Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$. Démontrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 18. Soit $n \geq 1$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $n + 1$ éléments distincts de \mathbb{K} .

- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

- Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base \mathcal{L} .

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminer les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Montrer que E est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Indications - Solutions

Exercice 1 : On prend $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_E$. On obtient $\lambda_1 e_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)e_3 = 0_E$. Par liberté de \mathcal{B} , on a $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: (f_1, f_2) est libre.

Il manque 1 vecteur pour compléter. On vérifie que e_2 convient.

Exercice 2 : On vérifie que $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$ est libre. Puis, $x_1 + x_4 = (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4)$.

Exercice 3 : C'est une famille échelonnée en degrés de cardinal 4, c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On pose $X = 3a + b(X - 2) +$

$$c(2X^2 + 5X) + d(3X^3 - X^2 + 1), \text{ puis on identifie les coefficients : } \begin{cases} 3d = 0 \\ 2c - d = 0 \\ 5c + b = 1 \\ d - 2b + 3a = 0 \end{cases}, \text{ donc } a = \frac{2}{3}, b = 1, c = d = 0.$$

Exercice 4 :

1. Il manque deux vecteurs pour faire une base. On peut prendre par exemple X et X^3 .
2. On cherche deux relations de liaison entre les vecteurs. On trouve $f_4 = f_2 - 2f_3 - f_1$ et $f_5 = f_1 - 2f_3 - f_6$ (qui correspondent aux paramètres du système). On peut donc enlever f_4 et f_5 .
3. (a) On vérifie que la famille est libre, donc $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 4$.
(b) On cherche une relation de liaison entre les vecteurs : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = (0, 0, 0, 0)$. En résolvant le système on trouve 1 paramètre λ_4 . En prenant $\lambda_4 = 1$, on voit que $u_4 \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Puis, en prenant $\lambda_4 = 0$, la seule solution de $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0, 0, 0, 0)$ est $(0, 0, 0)$. Donc (u_1, u_2, u_3) est libre. Donc $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3$.
(c) On procède comme pour le précédent, et on trouve encore 3.
4. (a) Le rang vaut 2 : \vec{u} et \vec{v} sont linéairement indépendants, mais $\vec{w} = (-1 + i)\vec{u} + (2 + 2i)\vec{v}$.
(b) Le rang vaut 2 si $m = -1$ ou $m = 2$ et 3 sinon : les vecteurs \vec{u} et \vec{w} sont toujours linéairement indépendants.
5. On cherche une relation de liaison et en résolvant le système, on trouve deux paramètres. Donc le rang vaut 2.

Exercice 5 : La famille est échelonnée en degrés et de cardinal $n + 1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 :

1. On écrit une relation de liaison entre A_1 et B_1 et on identifie les coefficients. La famille est libre. La dimension de $\text{Vect}(A_1, B_1)$ est 2.
2. Il suffit de montrer que A_1 et B_1 s'écrivent comme des CL de A_2 et B_2 . On trouve $A_1 = \frac{3}{7}A_2 + \frac{1}{7}B_2$ et $B_1 = -\frac{1}{7}A_2 + \frac{2}{7}B_2$. Ainsi $\text{Vect}(A_1, B_1) \subset \text{Vect}(A_2, B_2)$, et comme la dimension de $\text{Vect}(A_2, B_2)$ est au plus 2, on a égalité.

Exercice 7 : On a $E = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, donc E est bien un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On vérifie ensuite que la famille est libre, donc $\dim(E) = 3$.

Exercice 8 :

1. Facile...
2. On écrit E comme un Vect : $E = \left\{ \left(\frac{3}{2}y + 5z - \frac{9}{2}t, y, z, t \right), y, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}((3/2, 1, 0, 0), (5, 0, 1, 0), (-9/2, 0, 0, 1))$. Un supplémentaire de E est de dimension 1, donc il suffit de trouver 1 vecteur qui n'est pas dans E , par exemple $(0, 1, 0, 0)$ (il ne vérifie pas l'équation de E).

Exercice 9 :

1. Facile.
2. On prend $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, de sorte que $P \in E \iff a + b + c + d = 8a + 4b + 2c + d$, ce qui donne $c = -7a - 3b$. Donc $E = \{ aX^3 + bX^2 + (-7a - 3b)X + d, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \} = \text{Vect}(X^3 - 7X, X^2 - 3X, 1)$. On a bien $(X^3 - 7X, X^2 - 3X, 1)$ libre car échelonnée, donc c'est une base de E qui est de dimension 3.
Comme $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4, un supplémentaire de E est une droite : il suffit de prendre 1 polynôme non nul de degré au maximum 3 qui n'est pas dans E , par exemple X . Ainsi, $\text{Vect}(X)$ est un supplémentaire de E .

Exercice 10 :

1. Facile.

2. On prend $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $M \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} 3a - c = 3a + 7b \\ 7a + c = 3c + 7d \\ 3b - d = -a + b \\ 7b + d = -c + d \end{cases} \iff \begin{cases} 7b + c = 0 \\ 7a - 2c - 7d = 0 \\ a + 2b - d = 0 \\ 7b + c = 0 \end{cases}$, et en finissant de résoudre le système, on obtient $\begin{cases} a = d - 2b \\ c = -7b \end{cases}$, donc $M \in \mathcal{C} \iff \exists b, d \in \mathbb{R} \mid M = b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix} + dI_2$. On note $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $\mathcal{C} = \text{Vect}(I_2, N)$. Comme N n'est pas un multiple de I_2 , \mathcal{C} est de dimension 2.

Exercice 11 :

- On remarque que (u, v) est libre et que $w = u + v$, donc $\text{rg}(u, v, w) = 2$.
- (a) En résolvant l'équation, on trouve $G = \text{Vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$, donc G est un sev de dimension 2 de \mathbb{R}^3 .
(b) Comme u, v et w vérifient l'équation de G , on a $\text{Vect}(u, v, w) \subset G$. Par dimension, $G = \text{Vect}(u, v, w)$.
- Comme h est non nul (le vecteur nul est dans G), la famille (h) est libre et génératrice de \mathbb{R}^3 . Donc $\dim(\text{Vect}(h)) = 1$.
- $G \cap \text{Vect}(h)$ est un sev de $\text{Vect}(h)$ donc est soit de dimension 1, soit de dimension 0 : dans le premier cas, $G \cap \text{Vect}(h) = \text{Vect}(h)$, ce qui n'est pas le cas car $h \notin G$. Donc $G \cap \text{Vect}(h) = \{0\}$.
- G et $\text{Vect}(h)$ sont donc en somme directe et par dimension, ils sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 12 :

- Pour $F \cap G$, on résout le système $a(1, 0, 1) + b(2, 1, 0) = c(1, 1, 1)$. On trouve $a = b = c = 0$, donc $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. On voit de plus que la famille $(1, 0, 1), (2, 1, 0)$ est libre. Donc $\dim F + \dim G = 3$ et $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
- $\dim F = 3, \dim G = 2, \dim F \cap G = 1$, donc $\dim F + G = 4$.

Exercice 13 :

- Non, la somme des dimensions est trop petite.
- Oui : on vérifie que v_1, v_2, v_4, v_5 est libre.
- Non : la somme des dimensions est trop grande.
- Non : $v_5 - v_4 = v_3$, donc la famille (v_1, v_4, v_3, v_5) n'est pas libre.

Exercice 14 :

- Si $F \not\subset G$, alors il existe $x \in F \setminus G$. Comme F est de dimension 1 et $x \neq 0, F = \text{Vect}(x)$. Comme $x \notin G, G$ et F sont en somme directe (à démontrer). Puis par dimension, ils sont supplémentaires.
- Si $G \neq H$, alors $\dim(G \cap H) < 2$. Or $\dim(H + G) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G \cap H) \leq 3 = \dim(E)$. Donc $\dim(G \cap H) \geq 1$. D'où $\dim(G \cap H) = 1 : G \cap H$ est une droite.

Exercice 15 : Si $F \cap G = \{0\}$, alors $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G > n$. Mais $F \oplus G \subset E$ et $\dim E = n$. Contradiction.

Exercice 16 : $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = 2n - 2 - \dim(H_1 + H_2)$. Il y a deux cas : soit $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ (et alors $H_1 = H_2 = H_1 + H_2 = H_1 \cap H_2$) et $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$; soit $\dim(H_1 + H_2) = n$ et $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Exercice 17 : On montre d'abord que la famille est libre : on prend $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j = 0$. On montre par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$:

- Initialisation : on évalue l'égalité précédente en 1, ce qui donne $\lambda_0 2^n = 0$, donc $\lambda_0 = 0$.
- Hérédité : soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On suppose que $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$. Alors l'égalité de départ s'écrit : $(X-1)^{k+1} (\lambda_{k+1}(X+1)^{n-k-1} + \lambda_{k+2}(X+1)^{n-k-2} + \dots + \lambda_n)$. En simplifiant par $(X-1)^{k+1}$ et en évaluant en 1, on obtient $\lambda_{k+1} 2^{n-k-1} = 0$, donc $\lambda_{k+1} = 0$.

On conclut par récurrence.

Exercice 18 :

- On peut aussi procéder par analyse-synthèse!
 - Unicité : si P et Q conviennent, alors ce sont deux polyômes de $\mathbb{K}_n[X]$ dont les fonctions polynomiales coïncident en $n+1$ points : ils sont donc égaux.
 - Existence : le polynôme cherché a n racines $a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, \dots, a_n$ et est de degré au maximum n . Donc il s'écrit

$$L_i = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n (X - a_j). \text{ Puis pour trouver } \lambda, \text{ on prend } L_i(a_i) = 1 = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n (a_i - a_j). \text{ Donc } L_i = \frac{\prod_{j=0}^n (X - a_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n (a_i - a_j)}, \text{ qui est bien de degré } n.$$

- On vérifie d'abord que la famille est libre : on prend $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on évalue cette égalité de polynômes en a_k pour obtenir : $\lambda_k = 0$. Donc la famille est libre. Par cardinal, c'est une base.

3. On a $P = \sum_{i=0}^n x_i L_i$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on évalue en $a_k : P(a_k) = x_k$. Donc les coordonnées de P sont $(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

Exercice 19 :

1. Une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est donnée par $(E_{1,1}, E_{2,2}, \dots, E_{n,n}, E_{i,j} + E_{j,i})_{\substack{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ i \neq j}}$. Donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Puis, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Facile : on utilise la linéarité de la trace! On vérifie que la famille $(E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2, n \rrbracket} \cup (E_{i,j})_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}}$ est libre. Elle est de cardinal $n^2 - 1$. Donc E est de dimension au moins $n^2 - 1$. Or $\dim(E) < n^2$ car il existe des matrices de trace non nulle. Donc $\dim(E) = n^2 - 1$.