Probabilités - Exercices

I. Évènements, probabilités et dénombrements

Exercice I.1. Soient A, B et C trois évènements. Exprimer les évènements suivants à l'aide des opérations sur les ensembles :

1. Au moins un des trois évènements A, B, C est réalisé.
2. Un seul des évènements A, B, C est réalisé.
3. Au moins deux évènements parmi A, B, C sont réalisés.
4. Exactement deux évènements parmi A, B, C sont réalisés.
5. Aucun des trois évènement n'est réalisé.
6. Au plus deux évènements parmi A, B, C sont réalisés.

Exercice I.2. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$ et on définit P par : $\forall k \in \Omega, P(\{k\}) = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

1. Montrer que (Ω, P) est un EPF.
2. Calculer la probabilité $P(\{k \in \Omega \mid k \text{ est pair}\})$.

Exercice I.3. Un groupe de n personnes déposent leurs manteaux aux vestiaires d'un restaurant. Ils doivent quitter précipitamment le restaurant et récupèrent chacun un manteau au hasard.
Quelle est la probabilité que chaque personne ait son manteau à la sortie ?

Exercice I.4. Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus par les enfants d'une école, dont 4 sont gagnants. J'achète 10 billets. Quelle est la probabilité que je gagne au moins un lot ?

Exercice I.5. On dispose des cinq lettres B, A, O, B, A et B. On forme un mot au hasard avec ces lettres. Quelle est la probabilité que le mot obtenu soit BAOBAB ?

Exercice I.6. On lance deux dés à 6 faces équilibrés.

1. Décrire l'univers Ω et sa probabilité P.
2. Donner la probabilité d'obtenir :
   (a) un double (b) au plus un nombre pair (c) exactement un nombre pair (d) deux nombres qui se suivent.

Exercice I.7. On dispose de 8 paires de chaussures distinctes. On prend simultanément 4 chaussures au hasard. Quelle est la probabilité :

1. d'avoir deux paires ?
2. d'avoir au moins une paire ?
3. d'avoir exactement une paire ?
4. d'avoir deux pieds droits et deux pieds gauches ?

Exercice I.8. Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité que sa main contienne :

1. une seule paire ?
2. deux paires ?
3. un brelan (trois cartes identiques) ?
4. un carré ?
5. un full (un brelan et une paire) ?

Exercice I.9. On dispose de 43 boules blanches identiques et 6 boules noires identiques.

1. Combien y a-t-il de manières différentes de placer ces boules en ligne ?
2. Combien y a-t-il de manières différentes de placer ces boules en ligne sans que deux boules noires soient côte à côte ?
3. Quelle est la probabilité que dans un tirage de loto (6 numéro entre 1 et 49) il n'y ait pas deux nombres consécutifs ?

Exercice I.10 (Mines-Ponts PC 2018). On considère un panier de r pommes rouges et v pommes vertes. On pioche et on mange une à une les pommes au hasard. On s'arrête quand il n'y a plus que des pommes rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait mangé toutes les pommes ?

II. Probabilités conditionnelles

Exercice II.1. Dans un lycée, 60% des profs sont des femmes. Une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes. On choisit un prof au hasard. Sachant que c'est un porteur de lunette, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Exercice II.2. On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est $\frac{1}{2}$.

1. On lance le dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. On relance le dé et on obtient encore 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice II.3. Une usine dispose de 3 machines notées A, B et C.

- La machine A réalise 20% de la production et 1% de la production de A est défecteuse.
- La machine B réalise 30% de la production et 0,1% de la production de B est défecteuse.
- La machine C réalise 50% de la production et 0,01% de la production de C est défecteuse.

1. Quelle est la probabilité qu'un produit pris au hasard soit défectueux?
2. Le produit choisit est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il vienne de A?

Exercice II.4. Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $\frac{1}{10}$;
- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante vaut $\frac{4}{5}$;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante vaut $\frac{3}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » et $p_n = P(G_n)$.

1. Que vaut p_1 ?
2. Calculer p_2.
3. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
4. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{3}{5}$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \frac{1}{5^n}$.
7. En déduire la limite de la suite (p_n).

Exercice II.5. Soit $n \geq 2$. On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis on tire successivement et avec remise deux boules dans cette urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches?
Calculer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

III. Indépendance

Exercice III.1. Soit (Ω, P) un EPF avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et $P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}, P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}, P(\{\omega_3\}) = x$ et $P(\{\omega_4\}) = y$. Soient les évènements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. On suppose que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$.

1. Déterminer les valeurs de x et y.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants?

Exercice III.2. On lance deux dés équilibrés, un blanc, un noir. On considère les trois évènements :

- A : « le chiffre du dé noir est pair » ;
- B : « le chiffre du dé blanc est impair » ;
- C : « les deux dés ont la même parité ».

Montrer que les trois évènements sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement.

Exercice III.3. On lance $2n$ fois une pièce et on note F_k l'évènement « on obtient face au k-ième lancer ». Les lancers sont indépendants, la probabilité que la pièce tombe sur face est $\frac{2}{3}$.

1. Décrire à l'aide de $F_1, \dots, F_{2n}$ les évènements :
   (a) A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces ».
   (b) B : « on obtient un seul pile ».
   (c) C : « on n'a jamais pile suivi de face ».
2. Déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

Exercice III.4. On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs essayent d'atteindre une cible. À chaque essai, le joueur 1 (resp. le joueur 2) a une probabilité $p_1 \in]0,1[$ (resp. $p_2 \in]0,1[$) de toucher la cible. Les joueurs s'affrontent tour à tour jusqu'à ce que l'un d'entre eux ait touché la cible et gagne ainsi le jeu, ou bien jusqu'à avoir fait chacun N lancers. Le joueur 1 commence. Notons G_1 (resp. G_2) l'événement « Le joueur 1 (resp. 2) l'emporte » et G_3 « aucun des deux joueurs ne l'emporte ». On remarque que le joueur 1 tire aux essais impairs et le joueur 2 aux essais pairs. Pour tout $n \in [\![1, 2N]\!]$, notons :

- T_n l'événement « Le n-ième tir a lieu et le joueur concerné touche la cible à ce tir »,
- R_n l'événement « Le n-ième tir a lieu et le joueur concerné rate la cible à ce tir »,

1. (a) On suppose qu'à chaque fois que le joueur 1 tire sur la cible, il a une probabilité p_1 de la toucher, indépendamment de ce qui s'est passé avant. Traduire cela en fonction des événements proposés. Faire de même pour le joueur 2.
   (b) Calculer $P(R_n)$ pour tout $n \in [\![1, 2N]\!]$ (séparer les cas pairs et impairs).
   (c) Déterminer $P(G_3)$.
2. (a) Exprimer G_1 en fonctions des autres événements introduits puis déterminer l'expression de $P(G_1)$.
   (b) Calculer $P(G_2)$.
   (c) Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur p_1 et p_2 pour que le jeu soit favorable au deuxième joueur.

Exercice III.5. On dispose de deux dés A et B. Le dé A a 4 faces noires et 2 faces blanches. Pour le dé B, c'est le contraire. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir pile soit $p \in]0,1[$. Si on obtient pile, on joue avec le dé A, sinon on joue avec le dé B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir noir au premier lancer de dé.
2. Calculer la probabilité d'obtenir noir aux deux premiers lancers. Les évènements « obtenir noir au premier lancer » et « obtenir noir au deuxième lancer » sont-ils indépendants ?
3. On a obtenu noir aux n premiers lancers. Déterminer la probabilité d'avoir utilisé le dé A. Déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

IV. Problèmes

Exercice IV.1. Alice a deux pièces, l'une équilibrée, l'autre truquée donne face avec probabilité $\frac{2}{3}$. Malheureusement, Alice ne sait plus quelle pièce est truquée. On lui propose deux stratégies :

1. Alice lance une des deux pièces au hasard. Si elle obtient face, elle continue à jouer avec cette pièce, sinon elle joue avec l'autre. Elle ne change ensuite plus de pièce.
   On définit T : « Alice joue avec la pièce truquée après le premier lancer ».
   (a) Calculer $P(T)$.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir face au n-ième lancer ?
   On distinguera $n = 1$ et $n \geq 2$.
2. Alice lance une des deux pièces au hasard. Si elle obtient face, elle rejoue avec la même pièce, sinon elle change de pièce. Elle procède ainsi à chaque lancer.
   On définit F_n : « Alice obtient face au n-ième tirage » et T_n : « Alice joue avec la pièce truquée au n-ième tirage ».
   (a) Déterminer $P(T_{n+1})$ en fonction de $P(T_n)$, puis exprimer $P(T_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Déterminer $P(F_n)$.
3. Quelle est la meilleur stratégie à long terme pour avoir le plus de chance d'obtenir face ?

Exercice IV.2. Alice et Bob jouent au téléphone arabe avec leurs N amis : Alice pose une question à Bob qui doit répondre par OUI ou par NON en faisant passer l'information à son premier ami, qui la fait passer au suivant, et ainsi de suite jusqu'au N-ième qui donne la réponse à Alice. Chaque ami change la réponse avec probabilité $p \in]0,1[$. Les amis se comportent indépendamment les uns des autres.
On note I_n : « le n-ième amis transmet la réponse originale de Bob » et $p_n = P(I_n)$.

1. Que vaut p_1 ?
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et p et en déduire p_n en fonction de n et p.
3. Que se passe-t'il pour p_N lorsque N augmente ?

Exercice IV.3. Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre d'un triangle ABC :

- si la particule se trouve en A, la probabilité qu'elle soit en B à l'instant suivant est $0,75$ et la probabilité qu'elle soit en C est $0,25$;
- si la particule se trouve en B, la probabilité qu'elle soit en A à l'instant suivant est $0,75$ et la probabilité qu'elle soit en C est $0,25$;
- si la particule se trouve en C, elle va systématiquement en B à l'instant suivant.

On note A_n, B_n et C_n les évènements correspondant à la présence de la particule en A, B et C à l'instant n et a_n, b_n et c_n les probabilités de ces évènements.

1. Déterminer une relation entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n et c_n.
2. En déduire qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible puis calculer $P^{-1}MP$.
4. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n, a_0, b_0 et c_0.
5. Déterminer les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

1. $A\cup B\cup C$.
2. $(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(A\cup C))\cup(C\setminus(A\cup B))$.
3. $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
4. $((A\cap B)\setminus C)\cup((A\cap C)\setminus B)\cup((B\cap C)\setminus A)$.
5. $\overline{A\cup B\cup C}$.
6. $\overline{A\cap B\cap C}$ (contraire de tous les trois sont réalisés).

Exercice I.2 :

1. $P(\{1\})+P(\{2\})+\dots P(\{n\})=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}k^3=1$ ($\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$).
2. $P(\{k\in\Omega\mid k \text{ est pair}\})=\dfrac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(2k)^3=\dfrac{(n+2)^2}{2(n+1)^2}$ si n est pair, $=.\dfrac{(n-1)^2}{2n^2}$ si n impair.

Exercice I.3 : Le nombre total de permutations des manteaux est $n!$ et il n'y a qu'une seule permutation correcte. Donc la probabilité vaut $\dfrac{1}{n!}$.

Exercice I.4 : Il y a $\dbinom{300}{10}$ achats de billets possibles. Il y en a $\dbinom{296}{10}$ qui n'ont pas de billet gagnant, donc la probabilité est $1-\dfrac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}=\dfrac{2809969}{22052745}\cong 0,127\ldots$

Exercice I.5 : Nombre d'anagrammes possibles : $\dbinom{6}{3}\dbinom{3}{2}=60$, donc la probabilité est $\dfrac{1}{60}$.

Exercice I.6 :

1. $\Omega=[\![1,6]\!]^2$ et la probabilité est uniforme.
2. (a) $\dfrac{1}{6}$ (b) $\dfrac{3}{4}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{5}{36}$.

Exercice I.7 :

1. Il y a $\dbinom{16}{4}$ tirages possibles, et $\dbinom{8}{2}$ façons d'obtenir au moins 2 paires (donc exactement 2 paires). Donc $\dfrac{1}{65}$.
2. Il y a $\dfrac{16\times 14\times 12\times 10}{4!}=\dbinom{8}{4}\times 2^4$ façons de ne pas avoir de paire. Donc $1-\dfrac{8}{13}=\dfrac{5}{13}$.
3. $\dfrac{5}{13}-\dfrac{1}{65}=\dfrac{24}{65}$.
4. Il y a $\dbinom{8}{2}\dbinom{8}{2}$ façons de choisir deux pieds droits et deux pieds gauches, donc $\dfrac{28}{65}$.

Exercice I.8 :

1. Il y a $\dbinom{32}{5}$ mains possibles. Il y en a $\dbinom{8}{1}\dbinom{4}{2}\times\dfrac{28\times 24\times 20}{3!}=\dbinom{8}{1}\dbinom{4}{2}\times\dbinom{7}{3}\times 4^3$ qui ont une seule paire. Donc $\dfrac{480}{899}$.
2. Il y a $\dbinom{8}{2}\dbinom{4}{2}^2\times 24$ mains qui ont deux paires. Donc $\dfrac{108}{899}$.
3. Il y a $\dbinom{8}{1}\dbinom{4}{3}\dbinom{7}{2}4^2$ mains qui ont un brelan. Donc $\dfrac{48}{899}$.
4. Il y a 8×28 mains qui ont un carré. Donc $\dfrac{1}{899}$.
5. Il y a $\dbinom{8}{1}\dbinom{4}{3}\dbinom{7}{1}\dbinom{4}{2}$ mains qui ont un full. Donc $\dfrac{6}{899}$.

Exercice I.9 :

1. Ces boules prennent 49 places en ligne. On doit choisir où placer les 6 boules noires : $\dbinom{49}{6}$.
2. On commence par placer les 6 boules noires et 38 boules blanches en gardant 5 boules blanches de côté. On a $\dbinom{44}{6}$ façons de le faire. Ensuite, on place les 5 boules blanches entre les 6 boules noires.
3. $\dfrac{\binom{6}{44}}{\binom{49}{6}}=\dfrac{22919}{45402}$.

Exercice I.10 : L'ensemble des issues de l'expérience est $\Omega = \{(a_i) \in \{0,1\}^N \mid \sum a_i = r\}$ avec $N = r + v$ et 1 correspond à on mange une pomme rouge. La probabilité est uniforme sur Ω, qui est de cardinal $\binom{N}{r}$ (on choisit l'emplacement des 1) : en effet, $P(a_i) = \frac{r!v!}{N!}$ en réordonnant le produit des probabilités.

L'évènement qui nous intéresse est $A = \{(a_i) \in \Omega \mid a_N = 1\}$ qui est de cardinal $\binom{N-1}{r-1}$. Donc $P(A) = \frac{\binom{N-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} = \frac{r}{N}$.

Exercice II.1 : On note F : « c'est une femme », H : « c'est un homme » et L : « il/elle porte des lunettes ».
$P(F) = 0,6$, $P_F(L) = \frac{1}{3}$ et $P_H(L) = \frac{1}{2}$. Donc $P(H) = 0,4$ et $P(L) = 0,4$. Puis, $P_L(F) = \frac{P_F(L)P(F)}{P(L)} = \frac{1}{2}$.

Exercice II.2 :

1. On pose T : « le dé est pipé » et S : « on obtient 6 ». On a $P_T(S) = \frac{1}{2}$ et $P(T) = \frac{1}{4}$. Donc $P(S) = P_T(S)P(T) + P_{\overline{T}}(S)P(\overline{T}) = \frac{1}{4}$. Ainsi $P_S(T) = \frac{P_T(S)P(T)}{P(S)} = \frac{1}{2}$.
2. On pose SS : « on obtient deux 6 ». On a $P_T(SS) = \frac{1}{4}$, donc $P(SS) = \frac{1}{12}$. Ainsi $P_{SS}(T) = \frac{3}{4}$.

Exercice II.3 :

1. Notons D : « le produit est défectueux ». $P(D) = P_A(D)P(A) + P_B(D)P(B) + P_C(D)P(C) = 0,235\%$.
2. $P_D(A) = \frac{P_A(D)P(A)}{P(D)} = \frac{40}{47}$.

Exercice II.4 :

1. $p_1 = \frac{1}{10}$?
2. $p_2 = \frac{4}{5}\frac{1}{10} + \frac{3}{5}\frac{9}{10} = \frac{31}{50}$.
3. $\frac{27}{31}$.
4. $1 - \frac{36}{250} = \frac{107}{125}$.
5. On procède par récurrence.
6. Idem.
7. $\lim p_n = \frac{3}{4}$.

Exercice II.5 : Notons U_i : « on a choisi l'urne i » et BB : « les deux boules sont blanches ».
$P(U_i) = \frac{1}{n}$ et $P_{U_i}(BB) = \left(\frac{i}{n}\right)^2$, donc $P(BB) = \sum_{i=1}^{n} P_{U_i}(BB)P(U_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$.

Exercice III.1 :

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + x + y = 1$ et $y = \frac{1}{8}$, donc $x = \frac{1}{8}$.
2. $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{3}{8}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Or $P(A)P(B) = \frac{9}{32} \neq \frac{1}{8}$, donc A et B ne sont pas indépendants.

Exercice III.2 : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ et $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. Mais $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Exercice III.3 :

1. (a) $A = \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_{2k-1}}\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k-1} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_{2k}}\right)$.

   (b) $B = \bigcup_{k=1}^{2n} \left(\overline{F_k} \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2n} F_j\right)$.

   (c) Dès qu'un lancer donne pile, tous les suivant donnent pile aussi. Donc $C = \bigcup_{k=1}^{2n} \left(\bigcap_{j=1}^{k} F_j\right) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^{2n} \overline{F_j}\right)$.

2. $P(A) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_{2k-1}}\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k-1} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_{2k}}\right)\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_{2k-1}}\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{2k-1} \bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_{2k}}\right)$ par incompatibilité, puis
   $P(A) = \prod_{k=1}^{n} P(F_{2k})P(\overline{F_{2k-1}}) + \prod_{k=1}^{n} P(F_{2k-1})P(\overline{F_{2k}}) = \frac{2^n}{3^n}\frac{1}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}\frac{1}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ par indépendance.
   $P(B) = \sum_{k=1}^{2n} P\left(\overline{F_k} \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2n} F_j\right) = \sum_{k=1}^{2n} P(\overline{F_k}) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{2n} P(F_j)$ par indépendance. Donc $P(B) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2^{2n-1}}{3^{2n}} = n\frac{2^{2n}}{3^{2n}}$.
   $P(C) = \sum_{k=1}^{2n} \prod_{j=1}^{k} P(F_j) \prod_{j=k+1}^{2n} P(\overline{F_j}) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{2^k}{3^{2n}} = \frac{1}{3^{2n}} 2 \frac{1-2^{2n}}{1-2} = \frac{2^{2n+1}-2}{3^{2n}}$.

Exercice III.4 :

1. (a) Attention, les événements T_n ne sont pas indépendants car $P(T_{n+1}|T_n)=0$. On a par contre $P(T_1)=p_1$, $P(R_1)=1-p_1$, $P(T_{2n+1}|R_{2n})=p_1$, $P(R_{2n+1}|R_{2n})=1-p_1$ (pour $n>0$), $P(T_{2n+2}|R_{2n+1})=p_2$ et $P(R_{2n+2}|R_{2n+1})=1-p_2$.

   (b) Prenons $k\in\mathbb{N}^*$, $R_{2k}=\bigcap_{i=1}^{2k} R_i$ et en utilisant les probas composées : $P(R_{2k})=P(R_1)\prod_{i=2}^{2k}P(R_i|\bigcap_{j=1}^{i-1}R_j)=P(R_1)\prod_{i=2}^{2k}P(R_i|R_{i-1})=(1-p_1)(1-p_2)^k(1-p_1)^{k-1}=((1-p_1)(1-p_2))^k$. Pour $k\in\mathbb{N}$, on a aussi $R_{2k+1}=\bigcap_{i=1}^{2k+1}R_i$ et les probas composées donnent : $P(R_{2k+1})=(1-p_1)^{k+1}(1-p_2)^k$.

   (c) $G_3=R_{2N}$, donc $P(G_3)=(1-p_1)^N(1-p_2)^N$.

2. (a) $G_1=\bigcup_{k=0}^{N-1}T_{2k+1}$ qui est une union disjointe. Donc $P(G_1)=\sum_{k=0}^{N-1}P(T_{2k+1})$. Or pour $k>0$, $P(T_{2k+1})=P(T_{2k+1}\cap R_{2k})=P(T_{2k+1}|R_{2k})P(R_{2k})=p_1((1-p_1)(1-p_2))^k$ (formule qui marche aussi pour $k=0$), ce qui donne $P(G_1)=p_1\sum_{k=0}^{N-1}((1-p_1)(1-p_2))^k=p_1\dfrac{1-((1-p_1)(1-p_2))^N}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.

   (b) Comme (G_1,G_2,G_3) est un SCE, $P(G_2)=1-P(G_1)-P(G_3)=p_2(1-p_1)\dfrac{1-((1-p_1)(1-p_2))^N}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.

   (c) On voudrait $P(G_2)>P(G_1)$, donc $p_2(1-p_1)>p_1$ et $p_2>\dfrac{p_1}{1-p_1}$.

Exercice III.5 :

1. $P(N_1)=P_A(N_1)P(A)+P_B(N_1)P(B)=\dfrac{2}{3}p+\dfrac{1}{3}(1-p)=\dfrac{1}{3}(1+p)$.
2. $P(N_1\cap N_2)=P_A(N_1\cap N_2)P(A)+P_B(N_1\cap N_2)P(B)=\dfrac{4}{9}p+\dfrac{1}{9}(1-p)=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}p$. $P(N_2)=\dfrac{1}{3}(1+p)$. Donc il ne sont pas indépendants.
3. On commence par calculer $P(N_1\cap\ldots N_n)=\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{(2^n-1)p}{3^n}$. Donc
   $$P_{N_1\cap\ldots N_n}(A)=\frac{P_A(N_1\cap\ldots N_n)P(A)}{P(N_1\cap\ldots N_n)}=\frac{\frac{2^n}{3^n}p}{\frac{1}{3^n}+\frac{(2^n-1)p}{3^n}}=\frac{2^np}{1+(2^n-1)p}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

Exercice IV.1 :

1. (a) Notons T_1 : « Alice joue avec la pièce truquée au premier lancer ». $P(T)=P(F_1\cap T_1)+P(P_1\cap\overline{T_1})=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$.

   (b) Pour $n=1$, $P(F_1)=\dfrac{7}{12}$ et $P(P_1)=\dfrac{5}{12}$. Si $n\geq 2$, $P(F_n)=P_T(F_n)P(T)+P_{\overline{T}}(F_n)P(\overline{T})=\dfrac{43}{72}$.

2. (a) $P(T_{n+1})=P_{T_n}(F_n)P(T_n)+P_{\overline{T_n}}(P_n)P(\overline{T_n})=\dfrac{2}{3}P(T_n)+\dfrac{1}{2}(1-P(T_n))=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}P(T_n)$, puis on procède par récurrence en remarquant que $P(T_1)=\dfrac{1}{2}$.

   (b) $P(F_n)=\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{1}{6^{n+1}}\right)$.

3. $\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{1}{6^{n+1}}\right)-\dfrac{43}{72}=\dfrac{1}{360}-\dfrac{3}{5\times 6^{n+1}}\geq 0$ dès que $6^{n+1}\geq 216$, c'est-à-dire pour $n\geq 2$. Donc la meilleure stratégie est la deuxième.

Exercice IV.2 :

1. $p_1=1-p$.
2. $p_{n+1}=(1-p)p_n+p(1-p_n)=p+(1-2p)p_n$.
3. $p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=p+(1-2p)p_n-\dfrac{1}{2}=(1-2p)(p_n-1/2)$, donc $p_n=\dfrac{1}{2}(1+(1-2p)^n)$.
4. $p_N\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}$.

Exercice IV.3 :

1. On utilise la formule des probabilités totales : $P(A_{n+1})=P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n)+P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n)+P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)=0{,}75b_n$. De même pour les autres, on trouve : $b_{n+1}=0{,}75a_n+c_n$ et $c_{n+1}=0{,}25a_n+0{,}25b_n$.
2. On a donc la matrice $M=\begin{pmatrix}0&0{,}75&0\\0{,}75&0&1\\0{,}25&0{,}25&0\end{pmatrix}$.
3. On applique le pivot de Gauss et on trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{35}&\frac{1}{35}&\frac{1}{35}\\\frac{1}{10}&\frac{1}{10}&-\frac{2}{5}\\\frac{5}{14}&-\frac{9}{14}&\frac{6}{7}\end{pmatrix}$, puis $P^{-1}MP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

4. On a $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, et $M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix} P$. Donc $a_n = a_0 * (21v + 25w + 24)/70 + b_0 * (21v - 45w + 24)/70 + c_0 * (-42v + 30w + 12)/35$, $b_n = a_0 * (-7v - 25w + 32)/70 + b_0 * (-7v + 45w + 32)/70 + c_0 * (14v - 30w + 16)/35$ et $c_n = a_0 * (-14v + 14)/70 + b_0 * (-14v + 14)/70 + c_0 * (28v + 7)/35$, avec $v = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ et $w = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$.
5. Les limites sont $\lim a_n = \frac{12}{35}$, $\lim b_n = \frac{16}{35}$ et $\lim c_n = \frac{1}{5}$.