

**Colles 26 - 04/05/2026 au 08/05/2026****Thèmes traités en classe**

- Chapitre 22 : Dimension.
  1. Dimension finie : définition, théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.
  2. Lemme de Steinitz, cardinal d'une famille libre/base/génératrice.
  3. Rang d'une famille finie de vecteurs.
  4. Dimension d'un sev.
  5. Dimension d'une somme directe, formule de Grassmann.
  6. Existence d'un supplémentaire en dimension finie, caractérisation avec la dimension.

**Exercices traités en cours :** 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 16, 19.

- Chapitre 23 : Probabilités.
  1. Vocabulaire : univers, événements, issues, système complet d'événements.
  2. Probabilité sur un univers, distribution de probabilités.
  3. Probabilités conditionnelles : définition, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées, formule de Bayes.
  4. Indépendance, indépendance mutuelle.

**Exercices traités en cours :** I.1, I.2, I.3, I.4, I.6, II.2, II.4, II.5, III.3, III.4, III.5, IV.1.

- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  1. Définitions, vocabulaire.
  2. Opérations sur les applications linéaires.
  3. Noyau, image, injectivité, surjectivité.
  4. Endomorphismes remarquables : homothéties, projecteurs, symétries.
  5. Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité avec l'image d'une base.
  6. Une application linéaire est complètement déterminée par l'image d'une base.
  7. Isomorphisme et dimension.
  8. Rang d'une application linéaire : définition et propriétés.
  9. Théorème du rang.
  10. Bijectivité automatique en dimension finie.
  11. Ensemble des solutions d'une équation linéaire, application aux suites récurrentes d'ordre 2.
  12. Formes linéaires et hyperplans.

**Pas d'exercice sur ce chapitre**

**Questions de cours****Question 1**

- C22 Exercice 9 : soit  $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ . Montrer que  $E$  est un sev de  $\mathbb{R}_3[X]$  puis trouver une base de  $E$  et une base d'un supplémentaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .
- C22 Exercice 14 : soit  $E$  de dimension 3 et  $F$  et  $G$  deux sev avec  $\dim(F) = 1$  et  $\dim(G) = 2$ . Montrer que soit  $F \subset G$ , soit  $F \oplus G = E$  (faire un dessin pour illustrer).
- C22 Exercice 18 : soit  $n \geq 1$  et  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.
  1. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$  tel que :  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ .
  2. Montrer que  $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
  3. Soit  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $\mathcal{L}$ .
- Définition de probabilité conditionnelle sachant un événement. Montrer que si  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$  avec  $P(B) > 0$ , alors  $P_B$  est une probabilité sur  $\Omega$ .
- Énoncer les trois formules sur les probabilités conditionnelles. Démontrer la formule des probabilités composées.

- Donner la définition de système complet d'événements puis énoncer la formule des probabilités totales. Exercice II.5 : on a  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$  et l'urne  $i$  contient  $i$  boules blanches et  $n - i$  boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches?
- C23 Exercice III.3 :  $2n$  lancers d'une pièce avec probabilité  $\frac{2}{3}$  de tomber sur face. Exprimer A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B : « on obtient un seul pile » et C : « on n'a jamais pile suivi de face » à l'aide d'événements plus simples puis calculer les probabilités de A et de B.
- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire, puis que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Donner les définitions de  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$ . Montrer que  $\ker(f)$  est un sev de  $E$ .
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective ssi  $\ker(f) = \{0_E\}$ .
- Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors  $f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .
- Rappeler la définition d'une projection, d'une symétrie.  
Montrer que l'application  $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une symétrie de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En déduire que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Soit  $E$  de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  une forme linéaire non nulle. Montrer que  $\ker(u)$  est un hyperplan de  $E$ .
- Soit  $E$  de dimension finie et  $H$  un hyperplan de  $E$  et  $D$  une droite qui n'est pas contenue dans  $H$ . Alors  $E = H \oplus D$ .

### Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▷ Théorème de la base extraite.
  - ▷ Théorème de la base incomplète.
  - ▷ Lemme de Steinitz.
  - ▷ Condition sur le cardinal pour qu'une famille libre/génératrice soit une base.
  - ▷ Dimension d'une somme (formule de Grassmann).
  - ▷ Supplémentaires et dimension.
  - ▷ Rang d'une famille libre/génératrice.
  - ▷ Formule des probabilités composées.
  - ▷ Formule des probabilités totales.
  - ▷ Formule de Bayes.
  - ▷ Indépendance et contraires.
  - ▷ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec le noyau et l'image.
  - ▷ Propriétés des projections.
  - ▷ Propriétés des symétries.
  - ▷ Application linéaire complètement déterminée par l'image d'une base.
  - ▷ Lien rang et injectivité/surjectivité.
  - ▷ Rang d'une composée.
  - ▷ Théorème du rang.
  - ▷ Bijektivité automatique en dimension finie.
  - ▷ Lien hyperplan/formes linéaires.

## A savoir faire

1. Savoir déterminer la dimension d'un sev.
2. Savoir montrer que deux sev sont supplémentaires en utilisant des bases/les dimensions.
3. Savoir calculer le rang d'une famille de vecteurs.
4. Savoir décomposer un événement comme une union/intersection d'événements plus simples.
5. Savoir appliquer la formule des probabilités composées.
6. Savoir appliquer la formule des probabilités totales en utilisant un SCE.
7. Connaître la notion d'indépendance et savoir l'utiliser pour calculer la probabilité d'une intersection.