

Chapitre 24 : Applications linéaires

Dans tout le chapitre, E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

I. Applications linéaires

I.1. Définitions

Définition I.1. Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est une **application linéaire** si :

- $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Lorsque $E = F$, on parle d'**endomorphisme**, et on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Si $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme linéaire**.

Remarque I.1. • Les applications linéaires sont les applications qui préservent les deux opérations qui définissent la structure d'espace vectoriel.

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a toujours $f(0_E) = 0_F$.

Proposition I.1. Soit $f : E \rightarrow F$. L'application f est linéaire ssi : $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Proposition I.2. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors l'image par f d'une CL est égale à la CL des images par f :

$$\forall x_1, \dots, x_p \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, f\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k f(x_k).$$

Définition I.2. Un **isomorphisme** entre E et F est une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Lorsqu'une telle application existe, on dit que E et F sont **isomorphes**.

Lorsque $E = F$, on parle d'**automorphisme**.

I.2. Opérations sur les applications linéaires

Proposition I.3. $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -ev dont l'élément neutre est l'application nulle ($0_{\mathcal{L}(E, F)} : x \mapsto 0_F$) et les deux lois sont définies à partir de celles de F .

Proposition I.4. La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Remarque I.2. La composition se distribue sur la somme : $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ et $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.

On note $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$. En général, deux applications linéaires ne commutent pas. Quand elles commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

Proposition I.5. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire. Si $g \in \mathcal{L}(F, G)$ est aussi un isomorphisme, alors $f \circ g$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition I.3. On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E . C'est le **groupe linéaire** de E .

I.3. Applications linéaires et sev

Proposition I.6. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Si $E' \subset E$ est un sev de E , alors l'**image directe** de E' , $f(E') = \{f(x), x \in E'\}$ est un sev de F .
- Si $F' \subset F$ est un sev de F , alors l'**image réciproque** de F' , $f^{<-1>}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$ est un sev de E .

Définition I.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Le **noyau** de f est $\ker(f) = f^{<-1>}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
2. L'**image** de f est $\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Exemples I.1. • $\ker(0_{\mathcal{L}(E,F)}) = E$ et $\text{Im}(0_{\mathcal{L}(E,F)}) = \{0_F\}$.

- $\ker(\text{id}_E) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(\text{id}_E) = E$.

Proposition I.7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$:

1. f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.

Proposition I.8. Soit (e_1, e_2, \dots, e_p) une famille de vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$f(\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)) = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$$

En particulier, si (e_1, e_2, \dots, e_p) engendre E , alors $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$ engendrent $\text{Im}(f)$.

Méthode. En dimension finie, pour trouver une base de $\text{Im}(f)$, on prend une base \mathcal{B} de E puis on extrait une famille libre de $f(\mathcal{B})$.

Proposition I.9. Soit E_1 et E_2 deux sev supplémentaires non nuls de E . Pour tout couple $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$.

II. Endomorphismes remarquables

II.1. Homothéties

Définition II.1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $h_\lambda : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall x \in E, h_\lambda(x) = \lambda x$$

est appelée **homothétie de rapport λ** .

Proposition II.1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Si $\lambda = 0$, alors h_0 est l'application nulle.
2. Si $\lambda \neq 0$, alors h_λ est un automorphisme de E d'inverse $h_{\frac{1}{\lambda}}$.

Dans les deux cas, h_λ commute avec tous les endomorphismes de E .

Remarque II.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}_E)$. Alors $f|_{E_\lambda}$ est l'homothétie de E_λ de rapport λ .

II.2. Projecteurs, projections

Soient F et G deux sev supplémentaires de $E : E = F \oplus G$. Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$.

Définition II.2. La **projection de x sur F parallèlement à G** notée $\pi_{F,G}(x)$ est le vecteur x_F .
La **projection sur F parallèlement à G** est l'endomorphisme $\pi_{F,G} : x \in E \mapsto \pi_{F,G}(x) \in E$.

Proposition II.2. 1. $\begin{cases} \forall x \in F, & \pi_{F,G}(x) = x \\ \forall x \in G, & \pi_{F,G}(x) = 0 \end{cases}$. En particulier, $\pi_{F,G} \circ \pi_{F,G} = \pi_{F,G}$.
2. $\text{id}_E - \pi_{F,G} = \pi_{G,F}$.
3. $F = \ker(\text{id}_E - \pi_{F,G}) = \text{Im}(\pi_{F,G})$ et $G = \text{Im}(\text{id}_E - \pi_{F,G}) = \ker(\pi_{F,G})$.

Définition II.3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un **projecteur** si $p \circ p = p$.

Proposition II.3. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Si p est un projecteur, alors p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.

Remarque II.2. Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, $\text{Im}(p) = \ker(p - \text{id}_E)$.

On a donc deux approches des projecteurs/projections :

- une approche géométrique (on projette sur un sev parallèlement à un autre) ;
- une approche algébrique (c'est un endomorphisme qui vérifie $p \circ p = p$).

II.3. Symétries

Définition II.4. Soient F et G deux sev supplémentaires de E . Le **symétrique de x par rapport à F parallèlement à G** est $x_F - x_G$.

La **symétrie par rapport à F parallèlement à G** est l'endomorphisme $s_{F,G} : x \in E \mapsto s_{F,G}(x) \in E$.

Proposition II.4. 1. $\begin{cases} \forall x \in F, & s_{F,G}(x) = x \\ \forall x \in G, & s_{F,G}(x) = -x \end{cases}$. En particulier, $s_{F,G} \circ s_{F,G} = \text{id}_E$.
2. $-s_{F,G} = s_{G,F}$.
3. $F = \ker(s_{F,G} - \text{id}_E)$ et $G = \ker(s_{F,G} + \text{id}_E)$.
4. Si $s \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $s \circ s = \text{id}_E$, alors s est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{id}_E)$ et parallèlement à $\ker(s + \text{id}_E)$.

Remarque II.3. Si on sait que s est une symétrie, pour trouver F , il faut résoudre $s(x) = x$, et pour trouver G , $s(x) = -x$.

III. Applications linéaires en dimension finie

III.1. Applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition III.1. Soit (e_1, e_2, \dots, e_p) une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est surjective ssi $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ est génératrice de F ;
2. f est injective ssi $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ est libre ;
3. f est bijective ssi $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ est une base de F .

Théorème III.2

Soit (e_1, e_2, \dots, e_p) une base de E et (f_1, \dots, f_p) une famille quelconque de vecteurs de F . Alors il existe une unique application linéaire $\Phi : E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \Phi(e_i) = f_i.$$

Remarque III.1. Ainsi, pour définir une application linéaire, il suffit de donner l'image des vecteurs d'une base. De plus, si deux applications linéaires sont égales sur une base, alors ce sont les mêmes.

III.2. Isomorphismes et dimension

Théorème III.3

E est isomorphe à F ssi $\dim E = \dim F$.

III.3. Rang d'une application linéaire

Définition III.1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est de **rang fini** si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie. Le **rang** de f est alors $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Remarques III.2. • Lorsque E est de dimension finie, c'est aussi le rang de la famille $f(\mathcal{F})$ avec \mathcal{F} une base de E .

- $\text{rg}(f) = 0$ ssi $f = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Proposition III.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini, $\text{rg}(u) \leq \dim(F)$, et u est surjective ssi $\text{rg}(u) = \dim(F)$.
2. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini, $\text{rg}(u) \leq \dim(E)$, et u est injective ssi $\text{rg}(u) = \dim(E)$.

Proposition III.5. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini. Alors $g \circ f$ est de rang fini et

1. $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$;
2. si g est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$;
3. si f est un isomorphisme, alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.

Théorème III.6 (Théorème du rang)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si S est un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E alors $f|_S : S \rightarrow \text{Im}(f)$ est un isomorphisme.
2. On suppose que E est de dimension finie.

$$\dim E = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f).$$

Corollaire III.7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$.

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Remarques III.3. • Attention, ce résultat est faux en dimension infinie. Par exemple, $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}[X]$ est surjective, mais pas injective.

- Si $M \in T_n^+$ est inversible, alors $T \in T_n^+ \mapsto MT \in T_n^+$ est injective, donc bijective. En particulier, il existe $T \in T_n^+$ telle que $MT = I_n$: l'inverse de M est triangulaire supérieure.

Corollaire III.8. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim(E) = \dim(F)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est inversible;
2. il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = \text{id}_E$;
3. il existe $h \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $f \circ h = \text{id}_F$.

Si l'une d'entre elles est vraie, alors $g = h = f^{-1}$.

IV. Équations linéaires

Définition IV.1. On appelle **équation linéaire** d'inconnue $x \in E$ toute équation de la forme $f(x) = b$, où $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On dit que l'équation $f(x) = b$ est **compatible** si elle admet au moins une solution. Cela revient à dire que $b \in \text{Im}(f)$.

Proposition IV.1. Soit $f(x) = b$ une équation linéaire compatible et $x_0 \in E$ une solution. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x_0 + k, k \in \ker(f)\} = f^{<-1>}(\{b\})$$

Remarque IV.1. 1. Attention, $\{b\}$ n'est pas un sev de F (sauf si $b = 0_F$), donc $f^{<-1>}(\{b\})$ n'est pas un sev de F .

2. Considérons l'équation différentielle $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. L'application $\varphi : \mathcal{C}^1(I) \rightarrow \mathcal{C}^0(I)$ définie par $\varphi(y) = y' + a(x)y$ est linéaire. De plus, $\ker(\varphi) = \{y \in \mathcal{C}^1 \mid y' + a(x)y = 0\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène. On retrouve que l'ensemble des solutions de (E) s'écrit $\{y_0 + y_h, y_h \in \ker(\varphi)\}$.

Proposition IV.2. L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un ev de dimension 2.

Remarque IV.2. On a donné une base de cet espace vectoriel dans le chapitre 14.

V. Formes linéaires et hyperplans

On suppose dans ce paragraphe que E est de dimension finie $n \geq 1$.

Définition V.1. 1. Un **hyperplan** de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
2. Une **forme linéaire** sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Proposition V.1. 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire **non nulle**. Alors $\ker(u)$ est un hyperplan de E .
2. Soit H un hyperplan de E . Il existe $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(u)$. De plus, si $v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ vérifie aussi $H = \ker(v)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \lambda u$.

Remarque V.1. Tout hyperplan de E admet donc une équation $u(x) = 0$. Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ sont les coordonnées de x , alors l'équation s'écrit $\sum_{k=1}^n x_k u(e_k) = 0$.

Par exemple, pour $E = \mathbb{R}^3$, on retrouve qu'un plan vectoriel admet une équation $ax + by + cz = 0$.

Proposition V.2. Soit H un hyperplan de E et D une droite de E qui n'est pas contenue dans H . Alors $E = H \oplus D$.

Remarque V.2. Si E n'est pas de dimension finie, on peut définir un hyperplan : c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.