

Colles 27 - 18/05/2026 au 22/05/2026**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 23 : Probabilités.
Exercices traités en cours : I.1, I.2, I.3, I.4, I.6, II.2, II.4, II.5, III.3, III.4, III.5, IV.1.
- Chapitre 24 : Applications linéaires.
Exercices traités en cours : I.1, I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, III.1, III.3, III.5, III.6, III.10, III.11.
- Chapitre 25 : Intégration.
 1. Intégrale des fonctions en escaliers.
 2. Intégrale des fonctions continues sur un segment.
 3. Propriétés : linéarité, Chasles, croissance et positivité.
 4. Théorème fondamental de l'analyse.
 5. Rappels de calcul intégral.
 6. Sommes de Riemann.
 7. Taylor-Lagrange.

Pas d'exercice sur ce chapitre**Questions de cours****Question 1**

- Donner la définition de système complet d'événements puis énoncer la formule des probabilités totales. Exercice II.5 : on a n urnes numérotées de 1 à n et l'urne i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on tire successivement deux boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?
- C23 Exercice III.3 : $2n$ lancers d'une pièce avec probabilité $\frac{2}{3}$ de tomber sur face. Exprimer A : « on obtient une alternance parfaite de piles et de faces », B : « on obtient un seul pile » et C : « on n'a jamais pile suivi de face » à l'aide d'évènements plus simples puis calculer les probabilités de A et de B.
- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire, puis que la réciproque d'un isomorphisme est linéaire.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$. Montrer que $\ker(f)$ est un sev de E .
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E . Alors $f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Rappeler la définition d'une projection, d'une symétrie.
Montrer que l'application $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sev supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $\ker(u)$ est un hyperplan de E .
- Soit E de dimension finie et H un hyperplan de E et D une droite qui n'est pas contenue dans H . Alors $E = H \oplus D$.
- C24 Exercice I.8 : soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .
- C24 Exercice I.6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - ▷ Montrer que $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \ker(f - 2\text{id}_E)$ et $\text{Im}(f - 2\text{id}_E) \subset \ker(f - \text{id}_E)$.
 - ▷ Montrer que $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$.
- C24 Exercice II.1 : Soient $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(1) = P''(1) = 0\}$.
 - ▷ Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - ▷ Déterminer le projeté du polynôme $X^2 + X + 1$ sur F parallèlement à G , puis son symétrique par rapport à F parallèlement à G .
- C24 Exercice III.6 : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.
 1. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et \mathbb{R}^{n+1} .
 2. Soit $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer $\phi^{-1}(b_0, \dots, b_n)$.

- C24 Exercice III.10 : soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E . On prend $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$.
 1. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Vect}(a)$.
 2. On suppose que $f(a) = 1$ et on pose pour tout $x \in E$, $p(x) = f(x)a$.
Montrer que p est un projecteur de E et déterminer ses éléments caractéristiques.
- C24 Exercice III.11 : soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{C}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en donner une base.
- C24 Exercice III.5 : soit $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\}$.
 - ▷ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - ▷ Montrer que l'application $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
 - ▷ En déduire la dimension puis une base de E .
- Énoncer la propriété de stricte positivité de l'intégrale. La démontrer.
- Intégrale d'une fonction paire/impaire sur $[-a, a]$: énoncer et démonstration.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Formule des probabilités composées.
 - ▷ Formule des probabilités totales.
 - ▷ Formule de Bayes.
 - ▷ Indépendance et contraires.
 - ▷ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec le noyau et l'image.
 - ▷ Propriétés des projections.
 - ▷ Propriétés des symétries.
 - ▷ Application linéaire complètement déterminée par l'image d'une base.
 - ▷ Lien rang et injectivité/surjectivité.
 - ▷ Rang d'une composée.
 - ▷ Théorème du rang.
 - ▷ Bijektivité automatique en dimension finie.
 - ▷ Lien hyperplan/formes linéaires.
 - ▷ Propriétés de l'intégrale : positivité, croissance, inégalité triangulaire.
 - ▷ Théorème fondamental de l'analyse.
 - ▷ Stricte positivité.
 - ▷ Intégration et parité.
 - ▷ Théorème de convergence des sommes de Riemann.
 - ▷ Inégalité de Taylor-Lagrange.

A savoir faire

1. Savoir décomposer un évènement comme une union/intersection d'évènements plus simples.
2. Savoir appliquer la formule des probabilités composées.
3. Savoir appliquer la formule des probabilités totales en utilisant un SCE.
4. Connaître la notion d'indépendance et savoir l'utiliser pour calculer la probabilité d'une intersection.
5. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
6. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
7. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
8. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
9. Savoir appliquer le théorème du rang.
10. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.