Intégration - Exercices

I. Calculs d'intégrales

Exercice I.1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 (2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$ $(u=\sqrt{1+x})$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin(t/2)}{\sqrt{4-t^2}}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+t\ln(t)}$
10. $\displaystyle\int^x \frac{t+3}{t^2-2t+5}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int^x \frac{t^2-2t+3}{t^3-2t^2-t+2}\,\mathrm{d}t$

II. Propriétés importantes de l'intégrale

Exercice II.1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}}$.
On pourra faire un dessin pour s'aider...

Exercice II.2. Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice II.3.

1. En encadrant l'intégrande, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t=\ln 2$.
2. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_{-x}^{x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice II.4.

1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k+1}\le\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{k}$.
2. En déduire que $\displaystyle\ln(n+1)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\le 1+\ln n$.
3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Exercice II.5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer u_0.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, 0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.
   En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Calculer u_n+u_{n+2}.
4. Pour tout $n\ge 0$, on pose $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   Exprimer S_n en fonction de u_0 et u_{2n+2} puis déterminer $\lim S_n$.

Exercice II.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1. En encadrant la fonction intégrée, montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
   Exprimer u_n en fonction de I_0 et I_n.
4. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice II.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \,\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.
3. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n\,\mathrm{e} + b_n$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice II.8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)\,t^n \mathrm{d}t$.
Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice II.9 (Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. En déduire que :
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
   (b) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
4. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$, puis déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.10 (Lemme de Riemann-Lebesgue).
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice II.11 (Cauchy-Schwarz). Soit $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. En remarquant que la fonction $x \mapsto \int_a^b (xf(t)+g(t))^2 \mathrm{d}t$ est polynomiale et positive sur $\mathbb{R}$, montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}.$$

Exercice II.12 (Centrale PC 2018). Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que Φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$.
3. Soit F un sev de E de dimension finie qui est stable par Φ. On note φ l'endomorphisme induit par Φ sur F.
   Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{id}, \varphi, \dots, \varphi^m)$ est liée.
4. En déduire que tous les éléments de F sont solutions d'une même EDL homogène à coefficients constants.
5. En déduire F.

Exercice II.13 (X PC 2018). Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$.

1. Soit $\alpha \in [0,1[$. Montrer que $\int_0^\alpha x^n f(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. On suppose que $f(1) = 0$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\int_\alpha^1 x^n f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{n+1}$.

(b) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de I_n.

3. On ne suppose plus $f(1) = 0$. En se ramenant au cas précédent, déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.14 (TPE PSI 2018). Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice II.15. 1. Justifier que pour tout $x \geq -2$, $x^3 + 2x^2 + 1 > 0$.

2. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2t^2+1}}\mathrm{d}x$ est bien définie sur $[-2,+\infty[$ et est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[-2,2]$ sur un intervalle I.
4. Justifier que f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, que $0 \in I$ puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice II.16. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t}$ et $\varphi(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice II.17 (Centrale PSI 2018). 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_x^{y(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.

2. Justifier que la fonction y est monotone.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et bijective (on précisera le domaine d'arrivée).
4. En déduire que y est continue et dérivable. Donner une expression simple de sa dérivée en fonction de x et $y(x)$.
5. En encadrant $\displaystyle\int_x^{y(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$, déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de y lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

III. Sommes de Riemann

Exercice III.1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ en étudiant les sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice III.2. Calculer les limites des suites :

1. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+3\frac{k}{n}}$ 2. $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$ 3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

Exercice III.3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = \displaystyle\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right)$.
2. En déduire que $A_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Montrer alors que (A_n) converge vers 0.

IV. Taylor-Lagrange

Exercice IV.1. 1. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\mathrm{e}^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|x|}$. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. En appliquant TL à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.