

Intégration - Exercices

I. Calculs d'intégrales

Exercice I.1. Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|---|
| <p>1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$</p> <p>2. $\int_{-1}^1 (2t+1)e^{-t} dt$</p> <p>3. $\int_1^e t^n \ln(t) dt$</p> <p>4. $\int_1^x e^{2t} \sin(t) dt$</p> <p>5. $\int_0^1 \arctan(x) dx$</p> <p>6. $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} (u = \sqrt{1+x})$</p> | <p>7. $\int_0^1 \frac{\arcsin(t/2)}{\sqrt{4-t^2}} dt$</p> <p>8. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$</p> <p>9. $\int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln(t)}$</p> <p>10. $\int_1^x \frac{t+3}{t^2-2t+5} dt$</p> <p>11. $\int_1^x \frac{t^2-2t+3}{t^3-2t^2-t+2} dt$</p> |
|--|---|

II. Propriétés importantes de l'intégrale

Exercice II.1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{t}}$.

On pourra faire un dessin pour s'aider...

Exercice II.2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice II.3. 1. En encadrant l'intégrande, montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2$.

2. Calculer les limites suivantes :

- | | |
|--|---|
| <p>(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt$</p> <p>(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt$</p> | <p>(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$</p> <p>(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt$</p> |
|--|---|

Exercice II.4. 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

2. En déduire que $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$.

3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice II.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Calculer u_0 .

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Calculer $u_n + u_{n+2}$.

4. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exprimer S_n en fonction de u_0 et u_{2n+2} puis déterminer $\lim S_n$.

II. Propriétés importantes de l'intégrale

Exercice II.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En encadrant la fonction intégrée, montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
Exprimer u_n en fonction de I_0 et I_n .
4. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice II.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n e + b_n$.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice II.8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t) t^n dt$.
Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.9 (Wallis). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. En déduire que :
 - (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
 - (b) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
4. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$, puis déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.10 (Lemme de Riemann-Lebesgue).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que : $\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.11 (Cauchy-Schwarz). Soit $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. En remarquant que la fonction $x \mapsto \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 dt$ est polynomiale et positive sur \mathbb{R} , montrer que :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

Exercice II.12 (Centrale PC 2018). Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

1. Justifier que Φ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $\ker(\Phi)$ et $\text{Im}(\Phi)$.
3. Soit F un sev de E de dimension finie qui est stable par Φ . On note φ l'endomorphisme induit par Φ sur F .
Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(\text{id}, \varphi, \dots, \varphi^m)$ est liée.
4. En déduire que tous les éléments de F sont solutions d'une même EDL homogène à coefficients constants.
5. En déduire F .

Exercice II.13 (X PC 2018). Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer que $\int_0^\alpha x^n f(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. On suppose que $f(1) = 0$.

III. Sommes de Riemann

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \int_{\alpha}^1 x^n f(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$.

(b) En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de I_n .

3. On ne suppose plus $f(1) = 0$. En se ramenant au cas précédent, déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice II.14 (TPE PSI 2018). Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Exercice II.15. 1. Justifier que pour tout $x \geq -2$, $x^3 + 2x^2 + 1 > 0$.

2. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^3 + 2t^2 + 1}} dx$ est bien définie sur $[-2, +\infty[$ et est de classe \mathcal{C}^1 .

3. Montrer que f réalise une bijection de $[-2, 2]$ sur un intervalle I .

4. Justifier que f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur I , que $0 \in I$ puis calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice II.16. Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(t) = \frac{\text{sh}(t)}{t}$ et $\varphi(0) = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R} et étudier sa parité.

2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

3. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

Exercice II.17 (Centrale PSI 2018). 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\int_x^{y(x)} e^{t^2} dt = 1$.

2. Justifier que la fonction y est monotone.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Justifier que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et bijective (on précisera le domaine d'arrivée).

4. En déduire que y est continue et dérivable. Donner une expression simple de sa dérivée en fonction de x et $y(x)$.

5. En encadrant $\int_x^{y(x)} e^{t^2} dt$, déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe représentative de y lorsque x est au voisinage de $+\infty$.

III. Sommes de Riemann

Exercice III.1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$ en étudiant les sommes de Riemann de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice III.2. Calculer les limites des suites :

$$1. u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+3\frac{k}{n}}$$

$$2. v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{2^k}$$

$$3. w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$$

Exercice III.3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right)$.

2. En déduire que $A_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. Montrer alors que (A_n) converge vers 0.

IV. Taylor-Lagrange

Exercice IV.1. 1. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. En déduire la limite de $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. En appliquant TL à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Indications - Solutions

Exercice I.1 :

- $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} [\arctan(x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
- (IPP) $\int_{-1}^1 (2t+1)e^{-t} dt = e-5e^{-1}$
- (IPP) $\int_1^e t^n \ln(t) dt = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$
- (IPP ou complexe) $\int_0^x e^{2t} \sin(t) dt = \frac{1}{5} (2\sin(x) - \cos(x)) e^{2x}$
- (IPP) $\int_0^1 \arctan(x) dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$
- $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(u^2-1)u} 2u du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2}{u^2-1} du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du = \ln\left(\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)$
- $(u' u) \int_0^1 \frac{\arcsin(t/2)}{\sqrt{4-t^2}} dt = \frac{1}{2} [\arcsin(t/2)]_0^1 = \frac{\pi^2}{72}$
- (IPP) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \frac{\pi}{2} + \ln(2) - 2$
- $(u = \ln(t)) \int_1^2 \frac{dt}{t+t \ln(t)} = \ln(1 + \ln(2))$
- $\int_0^x \frac{t+3}{t^2-2t+5} dt = \int_0^x \frac{1}{2} \frac{2t-2}{t^2-2t+5} dt + \int_0^x \frac{4}{t^2-2t+5} dt = \ln(x^2-2x+5)/2 + \int_0^x \frac{4}{(t-1)^2+4} dt = \ln(x^2-2x+5)/2 + \int_0^x \frac{1}{((t-1)/2)^2+1} dt = 2 \arctan((x-1)/2) + \ln(x^2-2x+5)/2$
- (DES) $\int_0^x \frac{t^2-2t+3}{t^3-2t^2-t+2} dt = \int_0^x \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2} dt = \ln|x+1| - \ln|x-1| + \ln|x-2|$

Exercice II.1 : Comme la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2 + \sqrt{t}}$ est décroissante sur $[x, x+1]$, $\int_x^{x+1} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{t}} \leq f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.2 : On pose $g : x \mapsto f(x) - x$. C'est une fonction continue sur $[0, 1]$ et $\int_0^1 g(t) dt = 0$. Si g ne change pas de signe, alors $\forall t \in [0, 1], g(t) = 0$, donc f a une infinité de points fixes. Sinon, g change de signe, donc s'annule d'après le TVI. Donc f admet un point fixe.

Exercice II.3 :

- Pour tout $t \in [x, 2x]$, $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$, donc $e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ et $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$ puis on applique les gendarmes.
- (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}, |\sin(t^2)| \leq 1$, donc pour tout $x > 0$, $\left| \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \right| \leq 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.
- (b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc pour tout $x > 1$, $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt \geq \frac{x}{\ln(2x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (c) Pour tout $x > 0$, $\left| \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = [-1/t]_x^{2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- (d) Soit $x > 0$, (IPP) $\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.4 :

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_*^+ , donc $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$.
- On somme les encadrements précédents pour k allant de 1 à n .
- On divise l'encadrement précédent et on applique les gendarmes.

Exercice II.5 :

- $u_0 = \frac{\pi}{4}$.
- Pour tout $t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ puis on intègre. Par encadrement, la suite (u_n) converge vers 0.
- $u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
- Comme $\frac{1}{2k+1} = u_{2k} + u_{2k+2}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_{2k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k u_{2(k+1)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_{2k} - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k u_{2k} = u_0 - (-1)^n u_{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 = \frac{\pi}{4}$.

IV. Taylor-Lagrange

Exercice II.6 :

1. Pour tout $t \in [0, 1], 0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$, donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
3. Comme $\frac{1}{k} = I_{k-1} + I_k$, $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} I_{k-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} I_k = I_0 - (-1)^n I_n$.
4. $\lim u_n = I_0 = \ln 2$.

Exercice II.7 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, |I_n| \leq e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1}$, donc $I_n \rightarrow 0$ par encadrement.
2. On fait une intégration par parties : on dérive $x \mapsto x^{n+1}$ et on primitive $x \mapsto e^x$.
3.
 - Pour $n = 0, I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1$, donc $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$ conviennent.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ tels que $I_n = a_n e + b_n$. Alors $I_{n+1} = e - (n+1)(a_n e + b_n) = -na_n e - (n+1)b_n$, donc $a_{n+1} = -na_n \in \mathbb{Z}$ et $b_{n+1} = -(n+1)b_n$ conviennent.
4. Supposons par l'absurde que $e \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{a_n p + b_n q}{q}$. Donc $a_n p + b_n q \rightarrow 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n p + b_n q \in \mathbb{Z}$, donc la suite $(a_n p + b_n q)$ est stationnaire : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, a_n p + b_n q = 0$, donc $I_n = 0$. Or, c'est absurde car I_n est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0, 1]$ qui n'est pas identiquement nulle, donc $I_n > 0$.

Exercice II.8 : Comme f est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$. Donc $|I_n| \leq \int_0^1 |f(t)t^n| dt \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice II.9 :

1. Pour tout $x \in [0, \pi/2], 0 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in [0, \pi/2], \sin^n(x) \geq \sin^{n+1}(x)$. En intégrant de 0 à $\pi/2$, on trouve que $I_n \geq I_{n+1}$, donc que (I_n) est décroissante.
2. On fait une IPP : on dérive \sin^{n+1} et on intègre \cos .
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ et en multipliant par I_{n+1} , on trouve $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$. Ainsi, la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante. Son premier terme est $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
(b) On procède par récurrence.
4. La suite (I_n) est décroissante et positive, donc pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. En divisant par I_n , on a $\frac{n+2}{n+1} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$.
Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n} \rightarrow 1$ par encadrement. Ainsi, $I_n \sim I_{n+1}$. Puis, $I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$, donc $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2(n+1)}$ et $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$.

Exercice II.10 : On commence par faire une IPP : on dérive f et on primitive e^{int} : $\int_a^b f(t)e^{int} dt = \frac{1}{in} [f(t)e^{int}]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b f'(t)e^{int} dt$.
Or $\left| \frac{1}{in} [f(t)e^{int}]_a^b \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n} \rightarrow 0$ et $\left| \frac{1}{n} \int_a^b f'(t)e^{int} dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt \rightarrow 0$.

Exercice II.11 : On remarque que $P(x) = \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 dt = x^2 \int_a^b f(t)^2 dt + 2x \int_a^b f(t)g(t) dt + \int_a^b g(t)^2 dt$, donc P est un polynôme qui est toujours positif. Si $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$ alors la fonction f^2 est nulle sur $[a, b]$ (car continue, positive et d'intégrale nulle). Dans ce cas,

l'inégalité est vérifiée. Sinon, P est de degré 2 et toujours positif ou nul, donc son discriminant est négatif ou nul : $4 \left(\int_a^b f(t)g(t) dt \right)^2 - 4 \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt \leq 0$. En réorganisant et en prenant la racine carrée, on trouve l'inégalité voulue.

Exercice II.12 :

1. La linéarité découle de la linéarité de l'intégrale. D'autre part, si $f \in E$, la fonction $\Phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 d'après le TFA. En particulier, $\Phi(f) \in E$.
2. Soit $f \in E$. On a $\Phi(f) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(f)(x) = 0$. Donc si $f \in \ker(\Phi)$, alors $f = \Phi(f)' = 0_E$. Donc $\ker(\Phi) = \{0_E\}$.
On a déjà remarqué que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons $G = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid g(0) = 0\}$. Alors $\text{Im}(\Phi) \subset G$. De plus, si $g \in G$, on a $g' \in E$ et $g = \Phi(g')$. Donc $\text{Im}(\Phi) = G$.
3. Notons $n = \dim(F)$. Si $m \geq n^2$, alors $(\text{id}, \varphi, \dots, \varphi^m)$ est une famille de $\mathcal{L}(F)$ qui est de dimension n^2 : elle ne peut pas être libre.
4. Remarquons que pour tout $f \in F$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^k(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 et $\varphi^k(f)' = \varphi^{k-1}(f)$. Prenons le m minimum donné par la question précédente. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi^i = 0_{\mathcal{L}(F)}$.
Déjà, $\lambda_0 \neq 0$, sinon, on aurait pour tout $f \in F, \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi^i(f)$ et en dérivant, on aurait une contradiction avec la minimalité de m .

IV. Taylor-Lagrange

Ainsi, pour tout $f \in F$, $f = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi^i(f)$. On montre alors que f est de classe \mathcal{C}^∞ par récurrence.

Enfin, en dérivant la relation précédente m fois, on obtient que tous les éléments de F sont solutions d'une EDL $\sum_{i=0}^m \lambda_i y^{(i)} = 0$.

5. Soit $f \in F$. Alors $g = \varphi^m(f) \in F$ est solution de l'EDL précédente. Or, pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $g^{(k)}(0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy linéaire (légèrement hors programme pour l'ordre > 2), g est la solution nulle! Or $f = g^{(m)}$, donc $f = 0$. Ainsi, $F = \{0\}$.

Exercice II.13 :

- La fonction f est continue sur $[0, 1]$ qui est un segment, donc elle est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq M$. Ainsi, $\left| \int_0^\alpha x^n f(x) dx \right| \leq M \int_0^\alpha x^n dx = \frac{M\alpha^{n+1}}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $\alpha \in [0, 1]$.
- (a) Comme f est continue et que $f(1) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [\alpha, 1], |f(x)| \leq \varepsilon$. Donc $\left| \int_\alpha^1 x^n f(x) dx \right| \leq \varepsilon \frac{1-\alpha^{n+1}}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$.
(b) En utilisant le α ci-dessus, $|I_n| \leq n \left| \int_0^\alpha x^n f(x) dx \right| + \frac{n\varepsilon}{n+1} \leq n \left| \int_0^\alpha x^n f(x) dx \right| + \varepsilon$. Comme $\left| \int_0^\alpha x^n f(x) dx \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $n \left| \int_0^\alpha x^n f(x) dx \right| \leq \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq N$, $|I_n| \leq 2\varepsilon$. Ainsi, $I_n \rightarrow 0$.
- On pose $g = f - f(1)$. La fonction g vérifie les hypothèses précédentes. Donc $n \int_0^1 x^n g(x) dx \rightarrow 0$. Or $n \int_0^1 x^n g(x) dx = n \int_0^1 x^n f(x) dx - n \int_0^1 x^n f(1) dx = I_n - f(1) \frac{n}{n+1}$. Ainsi, $I_n \rightarrow f(1)$.

Exercice II.14 :

- Analyse : soit f vérifiant l'équation. Alors la fonction $x \mapsto \int_0^x (x-t)f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 de dérivée $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ d'après le TFA. Donc f est aussi de classe \mathcal{C}^1 . En dérivant l'égalité, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + \int_0^x f(t) dt = 0$$

De même, on trouve que f' est de classe \mathcal{C}^1 , et en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f = A \cos + B \sin$.

- Synthèse : soit $A, B \in \mathbb{R}$ et $f = A \cos + B \sin$.

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)(A \cos(t) + B \sin(t)) dt &= x[A \sin(t) - B \cos(t)]_0^x - \int_0^x t(A \cos(t) + B \sin(t)) dt \\ &= Ax \sin(x) - Bx \cos(x) + xB - [t(A \sin(t) - B \cos(t))]_0^x + \int_0^x A \sin(t) - B \cos(t) dt \\ &= xB - A \cos(x) + A - B \sin(x) \end{aligned}$$

On remplace dans l'équation pour trouver $B = 0, A = 1$.

La seule solution est $f = \cos$.

Exercice II.15 :

- On pose $g : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 1$ qui est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} avec $g'(x) = 3x^2 + 4x$. Donc g' s'annule en 0 et en $-\frac{4}{3}$. En dressant le tableau de variations de g , on trouve que g est croissante sur $[-2, -4/3]$, avec $g(-2) = 1$, puis décroissante sur $[-4/3, 0]$ avec $g(0) = 1$ puis croissante sur $[0, +\infty[$. Donc on a bien $\forall x \in [2, +\infty[$, $g(x) > 0$.
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3 + 2t^2 + 1}}$ est continue sur $[-2, +\infty[$ d'après la question précédente. D'après le TFA, la fonction f est bien définie et \mathcal{C}^1 sur $[-2, +\infty[$.
- On a pour tout $x \geq -2$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[-2, 2]$ et continue sur $[-2, 2]$. D'après le TBM, f réalise une bijection de $[-2, 2]$ sur $[f(-2), f(2)]$.
- Comme f' ne s'annule pas sur $[-2, 2]$, f^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^1 .
 $f(1) = 0$, donc $0 \in I$. De plus, $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)}$. Or $f' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$, donc $(f^{-1})'(0) = 2$.

Exercice II.16 :

- La fonction φ est continue sur \mathbb{R}^* par opérations, et $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 = \varphi(0)$. Donc φ est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est bien définie.
Prenons $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \varphi(t) dt = \int_x^{2x} \varphi(-u)(-du) = -f(x)$ en posant $u = -t$. Donc f est impaire.

IV. Taylor-Lagrange

- On pose $F : x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$. Comme φ est continue sur \mathbb{R} , d'après le TFA, F est l'unique primitive de φ qui s'annule en 0. En particulier, F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = \varphi$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F(2x) - F(x)$, donc f est dérivable par opérations. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{\text{sh}(2x) - \text{sh}(x)}{x}$.
- Comme f est impaire, il suffit de l'étudier sur \mathbb{R}_+ . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leq 2x$, donc $\text{sh}(x) \leq \text{sh}(2x)$ par croissance de sh . Ainsi f' est positive sur \mathbb{R}_+ . f est donc croissante sur \mathbb{R} . Enfin, comme $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $t \geq x_0$, $\varphi(t) \geq 1$ et donc pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \geq \int_x^{2x} 1 dt = x \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Exercice II.17 :

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : y \mapsto \int_x^y e^{t^2} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 car c'est une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$. Sa dérivée étant strictement positive, elle est strictement croissante sur $[x, +\infty[$. De plus, $g(x) = 0$ et $\forall y \geq x$, $g(x) \geq y - x$, donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. On conclut avec le TVI.
- Soit $x_1 < x_2$, $\int_{x_1}^{y(x_1)} e^{t^2} dt = \int_{x_2}^{y(x_2)} e^{t^2} dt$, donc $\int_{x_1}^{x_2} e^{t^2} dt = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} e^{t^2} dt$ avec Chasles. D'où $y(x_2) > y(x_1)$.
- C'est le TFA. On a de plus $F'(x) = e^{x^2} > 0$, donc F est strictement croissante. Puis, pour $x > 0$, $F(x) \geq x$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et si $x < 0$, $F(x) = -\int_x^0 e^{t^2} dt \leq x$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$. Donc TBM : F est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- On a $F(y(x)) - F(x) = 1$, donc $y(x) = F^{-1}(1 + F(x))$. Comme F' ne s'annule pas sur \mathbb{R} , F^{-1} est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par composition, y est de classe \mathcal{C}^1 , et $y'(x) = \frac{F'(x)}{F'(F^{-1}(1 + F(x)))} = \frac{e^{x^2}}{e^{y(x)^2}} = e^{x^2 - y(x)^2}$.
- Par croissance de $t \mapsto e^{t^2}$ sur \mathbb{R}_+ , on a $(y(x) - x)e^{x^2} \leq \int_x^{y(x)} e^{t^2} dt \leq (y(x) - x)e^{y(x)^2}$, donc $e^{-y(x)^2} \leq y(x) - x \leq e^{-x^2}$. Donc $y(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$: la première bissectrice est donc asymptote à y en $+\infty$.

Exercice III.1 : Les sommes de Riemann de f sur l'intervalle $[0, 1]$ sont $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

Exercice III.2 :

- Sommes de Riemann de $f(x) = \frac{1}{1+3x}$: $\lim u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+3x} = \frac{\ln 4}{3}$.
- Sommes de Riemann de $f(x) = 2^x$: $\lim v_n = \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}$.
- Sommes de Riemann de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$: $\lim w_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \sqrt{3} - 1$.

Exercice III.3 :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n}\right) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2n-2} f\left(\frac{i}{2n}\right)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impair}}}^{2n-1} f\left(\frac{i}{2n}\right)$, d'où le résultat.
- Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, elle est lipschitzienne sur $[0, 1]$ d'après l'IAF. Donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|A_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{2k}{2n}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n} = \frac{M}{4n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- On commence par montrer que $A_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{2k}{2n+1}\right) - f\left(\frac{2k+1}{2n+1}\right) \right) + \frac{1}{2n+1} f\left(\frac{2n-2}{2n}\right)$, puis on procède comme avant pour montrer que $A_{2n+1} \rightarrow 0$.
Comme les suites extraites des termes pairs et des termes impairs tendent toutes les deux vers 0, $A_n \rightarrow 0$.

Exercice IV.1 :

- On applique TL à la fonction \cos à l'ordre 4 en 0 : $\cos(0) = 1$, $\cos'(0) = 0$, $\cos''(0) = -1$, $\cos^{(3)}(0) = 0$ et $\cos^{(4)}(x) = \cos(x)$. La fonction \cos est bornée par 1 sur \mathbb{R} , donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - (1 - x^2/2)| \leq \frac{|x|^4}{4!} = \frac{x^4}{24}$.
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \exp^{(k)}(x) = \exp(x)$, donc on applique TL directement sur l'intervalle $[0, x]$.
- $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ et $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ pour $k \geq 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [0, +\infty[$, $|f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} n! = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On prend alors $x = 1$ et on trouve $\lim u_n = \ln(2)$.