

Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires

Dans tout le chapitre, E, F et G sont trois \mathbb{K} -ev de dimension finie.

I. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

I.1. Définition

Soit p, n deux entiers naturels non nuls. On peut identifier \mathbb{K}^p à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ grâce à l'isomorphisme : $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mapsto$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}). \text{ De même on identifie } \mathbb{K}^n \text{ à } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Définition I.1. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on peut donc définir l'application :

$$\varphi_A: \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{array}$$

On appelle φ_A l'**application linéaire canoniquement associée** à A .

Proposition I.1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application φ_A est linéaire.

I.2. Noyau et image d'une matrice

Définition I.2. On appelle **noyau de** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, noté $\ker(A)$ le sev de \mathbb{K}^p :

$$\ker(A) = \ker(\varphi_A) = \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0_n\}.$$

Remarque I.1. Le noyau d'une matrice n'est **jamais vide**. Le vecteur nul est toujours dans le noyau.

Définition I.3. On appelle **image de** $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $\text{Im}(A)$ le sev de \mathbb{K}^n :

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(\varphi_A) = \{Y \in \mathbb{K}^n \mid \exists X \in \mathbb{K}^p, Y = AX\}.$$

Le **rang de** A est l'entier : $\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi_A) = \dim(\text{Im}(A))$.

Proposition I.2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{K}^n$ ses vecteurs colonnes

1. $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.
En particulier, le rang de A est égal au rang de la famille de vecteur C_1, \dots, C_p .
2. $\dim(\ker(A)) \leq p$ et $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$
3. $\text{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = p$.

I.3. Opérations élémentaires, noyau et image

Proposition I.3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A en faisant des opérations élémentaires sur les lignes, alors $\ker(B) = \ker(A)$.
2. Si $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A en faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, alors $\text{Im}(C) = \text{Im}(A)$.
3. On a $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{rg}(C)$.

Méthode. 1. Pour déterminer une base de $\ker(A)$ on échelonne le système $AX = 0_n$.

II. Des applications linéaires aux matrices

2. Pour obtenir des équations de $\text{Im}(A)$, on échelonne le système $AX = B$: on obtient alors des équations sur les coordonnées de B pour que le système soit compatible.
3. Pour déterminer le rang d'une matrice A , on effectue le pivot de Gauss pour se ramener à une matrice échelonnée et on compte le nombre de pivots de celle-ci.

Proposition I.4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

Remarque I.2. C'est dire d'une autre façon qu'on peut faire le pivot de Gauss sur les lignes ou sur les colonnes pour trouver le rang de A .

I.4. Systèmes linéaires (bis)

On rappelle qu'un système linéaire peut se mettre sous forme matricielle $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice des coefficients du système et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est le second membre.

Définition I.4. Le **rang** d'un système est égal au rang de sa matrice.

Proposition I.5. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Le rang de A est égal au nombre d'inconnues principales du système $AX = 0_n$.
2. Le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \text{Im}(A)$.
3. Si $B \in \text{Im}(A)$ avec $AX_0 = B$. L'ensemble des solutions de $AX = B$ est :

$$X_0 + \ker(A) = \{X_0 + X_H, X_H \in \ker(A)\}.$$

En particulier, si $B = 0_n$, alors l'ensemble des solutions est un sev de \mathbb{K}^p de dimension $p - \text{rg}(A)$, qui est le nombre de paramètres du système.

II. Des applications linéaires aux matrices

II.1. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition II.1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de E . La matrice de (x_1, \dots, x_p) dans la base \mathcal{B} est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j -ième colonne est formée des coordonnées de x_j dans la base \mathcal{B} .

Autrement dit, si pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on décompose $x_j = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Proposition II.1. Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteur de E et \mathcal{B} une base de E . Alors $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$.

II.2. Matrice d'une application linéaire dans une base

Définition II.2. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La **matrice de f dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$, est la matrice dont les p colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_p)$ dans la base \mathcal{B}_F .

Autrement dit, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ avec pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i$.

Remarque II.1. Si $E = F$ et on prend la même base \mathcal{B} au départ et à l'arrivée, on note en général $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice obtenue.

Proposition II.2. L'application :

$$\Phi: \begin{array}{ll} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\dim \mathcal{L}(E, F) = np$.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on dit que $\Phi^{-1}(A)$ est l'**application linéaire associée à A** dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .

Proposition II.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$. On a

$$y = f(x) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Remarque II.2. Ainsi, pour trouver les coordonnées de $f(x)$ dans la base \mathcal{B}_F , il suffit de multiplier les coordonnées de x dans la base \mathcal{B}_E par M .

Proposition II.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Prenons $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et \mathcal{B}_G des bases de E, F et G .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f).$$

En particulier, f est inversible ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ est inversible et alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)^{-1}$.

Théorème II.5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence entre :

1. A est inversible.
2. φ_A est un isomorphisme.
3. $\ker(A) = \{0_n\}$.
4. $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.
5. $\text{rg}(A) = n$.
6. La famille des colonnes (C_1, \dots, C_n) de A est libre.

On dit alors que le système $AX = B$ est de Cramer.

Corollaire II.6. Soit \mathcal{F} une famille finie de vecteurs de E . \mathcal{F} est une base de E ssi $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

Corollaire II.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. S'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
2. S'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = C$.

Proposition II.8. Une matrice triangulaire est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont non nuls.

II.3. Exemples

Définition II.3. Soit (e_1, e_2) la base canonique du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation d'angle θ centrée en l'origine est l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par :

$$\begin{cases} r_\theta(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \\ r_\theta(e_2) = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \end{cases}$$

En particulier, $\text{Mat}_{(e_1, e_2)}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

II. Des applications linéaires aux matrices

On considère E de dimension n .

Proposition II.9. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour toute base \mathcal{B} de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(h_{\lambda}) = \lambda I_n$$

Proposition II.10. Soient F et G deux sev supplémentaires de E de dimensions r et $n - r$. Soient \mathcal{B}_F une base de F , \mathcal{B}_G une base de G et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ la base de E correspondante.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Pi_{F,G}) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}, \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_{F,G}) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

II.4. Changement de bases

On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_p$, mais $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E)$ n'est pas la matrice identité si \mathcal{B} et \mathcal{B}' ne sont pas les mêmes.

Définition II.4. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de E . La **matrice de passage** de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

Autrement dit, les colonnes de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Remarque II.3. La matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ car $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_p$.

Proposition II.11. Soit $x \in E$. On note (x_1, \dots, x_p) ses coordonnées dans la base \mathcal{B} et (x'_1, \dots, x'_p) ses coordonnées dans la base \mathcal{B}' . Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix}$$

Théorème II.12

Soient $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Notons $P = P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}'_F}$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = Q^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P.$$

Remarque II.4. En particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases de E avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P$.

Définition II.5. 1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = QAP$.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

II.5. Les différents rangs

Théorème II.13

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F .

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)).$$

Proposition II.14. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$.

1. $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$;
2. $\text{rg}(AD) = \text{rg}(A) = \text{rg}(CA)$.