Colles 28 - 25/05/2026 au 29/05/2026

Thèmes traités en classe

- Chapitre 24 : Applications linéaires.
  Exercices traités en cours : I.1, I.2, I.3, I.4, I.5, I.6, I.8, I.10, II.1, III.1, III.3, III.5, III.6, III.10, III.11.
- Chapitre 25 : Intégration.
  Exercices traités en classe : II.4, II.6, II.8, II.9, II.10, II.11, II.12, III.2, IV.1.
- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
  1. Application linéaire canoniquement associée à une matrice : définition, linéarité.
  2. Noyau et image d'une matrice, opérations élémentaires.
  3. Retour sur les systèmes linéaires.
  4. Matrice d'une application linéaire dans des bases.
  5. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, où $p=\dim(E)$ et $n=\dim(F)$.
  6. Matrice de $f(x)$, matrice de $f\circ g$.
  7. Changement de bases, matrices semblables/équivalentes.
  8. Les différents rangs.

  Pas d'exercice sur ce chapitre

Questions de cours

Question 1

- C24 Exercice I.8 : soit $f,g\in\mathscr{L}(E)$ tels que $f\circ g=g\circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.
- C24 Exercice I.6 : Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f^2-3f+2\,\mathrm{id}_E=0_{\mathscr{L}(E)}$.
  - ▹ Montrer que $\mathrm{Im}(f-\mathrm{id}_E)\subset\ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{id}_E)\subset\ker(f-\mathrm{id}_E)$.
  - ▹ Montrer que $E=\ker(f-\mathrm{id}_E)\oplus\ker(f-2\,\mathrm{id}_E)$.
- C24 Exercice II.1 : Soient $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P(1)=0\}$ et $G=\{P\in\mathbb{R}_2[X]\mid P'(1)=P''(1)=0\}$.
  - ▹ Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_2[X]$.
  - ▹ Déterminer le projeté du polynôme X^2+X+1 sur F parallèlement à G, puis son symétrique par rapport à F parallèlement à G.
- C24 Exercice III.6 : soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels distincts. Pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\phi(P)=(P(a_0),\dots,P(a_n))$.
  1. Montrer que ϕ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
  2. Soit $(b_0,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer $\phi^{-1}(b_0,\dots,b_n)$.
- C24 Exercice III.10 : soit E un espace vectoriel de dimension n et f une forme linéaire sur E. On prend $a\in E$ tel que $f(a)\neq 0$.
  1. Montrer que $E=\ker(f)\oplus\mathrm{Vect}(a)$.
  2. On suppose que $f(a)=1$ et on pose pour tout $x\in E$, $p(x)=f(x)a$.
     Montrer que p est un projecteur de E et déteminer ses éléments caractéristiques.
- C24 Exercice III.11 : soit $\alpha\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $H=\{P\in\mathbb{C}_n[X]\mid P(\alpha)=0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{C}_n[X]$ et en donner une base.
- C24 Exercice III.5 : soit $E=\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+3}=4u_{n+2}-u_{n+1}-6u_n\}$.
  - ▹ Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
  - ▹ Montrer que l'application $\varphi: u\in E\mapsto(u_0,u_1,u_2)\in\mathbb{R}^3$ est un isomorphisme.
  - ▹ En déduire la dimension puis une base de E.
- Énoncer la propriété de stricte positivité de l'intégrale. La démontrer.
- Intégrale d'une fonction paire/impaire sur $[-a,a]$: énoncer et démonstration.
- C25 Exercice II.4 :

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$.

- C25 Exercice II.9 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
  1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
  2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
  3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
- C25 Exercice II.11 : Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\displaystyle\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}\sqrt{\displaystyle\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t}$ en utilisant la fonction $P : x \mapsto \displaystyle\int_a^b (xf(t) + g(t))^2\mathrm{d}t$.
- C25 Exercice II.10 : soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Exemple du cours : calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$ en utilisant des sommes de Riemann.
- C25 Exercice IV.1.3 : en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Montrer que c'est une application linéaire.
- Donner la définition de noyau et image d'une matrice. Montrer que l'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.
- Soit $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$.
- Donner la définition de matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$, énoncer la formule de changement de base pour une application linéaire.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
  - ▹ Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec le noyau et l'image.
  - ▹ Propriétés des projections.
  - ▹ Propriétés des symétries.
  - ▹ Application linéaire complètement déterminée par l'image d'une base.
  - ▹ Lien rang et injectivité/surjectivité.
  - ▹ Rang d'une composée.
  - ▹ Théorème du rang.
  - ▹ Bijectivité automatique en dimension finie.
  - ▹ Lien hyperplan/formes linéaires.
  - ▹ Propriétés de l'intégrale : positivité, croissance, inégalité triangulaire.
  - ▹ Théorème fondamental de l'analyse.
  - ▹ Stricte positivité.
  - ▹ Intégration et parité.
  - ▹ Théorème de convergence des sommes de Riemann.
  - ▹ Inégalité de Taylor-Lagrange.

- ▹ Formule pour la matrice d'une composée.
- ▹ Conditions équivalentes pour l'inversibilité d'une matrice carrée.
- ▹ Matrice d'une projection/symétrie dans une base adaptée.
- ▹ Formule de changement de bases.
- ▹ Lien rangs : Matrice/application linéaire, matrice/famille de vecteurs.

A savoir faire

1. Savoir montrer qu'une application est linéaire/est un endomorphisme.
2. Savoir déterminer une base du noyau/de l'image d'une application linéaire.
3. Savoir déterminer l'expression d'une projection, d'une symétrie.
4. Savoir vérifier qu'un endomorphisme est une projection/une symétrie et trouver ses sous-espaces caractéristiques.
5. Savoir appliquer le théorème du rang.
6. Savoir utiliser une forme linéaire pour justifier qu'un sous-ensemble est un hyperplan.
7. Savoir calculer une intégrale.
8. Savoir encadrer une intégrale.
9. Savoir utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
10. Savoir calculer la limite d'une somme de Riemann.
11. Savoir appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.