

## Matrices et applications linéaires - Exercices

**Exercice 1.** Pour chaque matrice, déterminer l'application linéaire canoniquement associée puis son noyau, son rang et son image.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** Pour chaque application linéaire, déterminer sa matrice dans les bases canoniques, puis dire si l'application est injective, surjective, bijective.

$$1. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y);$$

$$2. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y);$$

$$3. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y);$$

$$4. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z);$$

$$5. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, x - z, x + z).$$

**Exercice 3.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  son application linéaire canoniquement associée.

$$1. \text{ Déterminer l'ensemble des vecteurs } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } f(u) = 4u.$$

$$2. \text{ Déterminer l'ensemble des vecteurs } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } f(u) = 2u.$$

$$3. \text{ Soit } e_2 \in \mathbb{R}^3 \text{ un vecteur non nul tel que } f(e_2) = 2e_2. \text{ Déterminer un vecteur } e_3 \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(e_3) = 2e_3 + e_2.$$

$$4. \text{ Justifier qu'il existe une base de } \mathbb{R}^3 \text{ dans laquelle la matrice de } f \text{ est } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , on définit l'application linéaire  $f_m(x, y, z) = (mx + y + (2m - 1)z, x + (1 - m)y, x - y + (2 - m)z)$ .

$$1. \text{ Déterminer la matrice } A \text{ canoniquement associée à } f_m.$$

$$2. \text{ Pour quelles valeurs de } m \text{ la rang de } A \text{ vaut-il 3? Que peut-on dire de } f_m \text{ dans ce cas?}$$

$$3. \text{ Déterminer le noyau de } A \text{ en fonction de } m.$$

**Exercice 5.** 1. Soit  $\varphi: P \in \mathbb{C}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{C}_3[X]$ . Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans les bases canoniques.

$$2. \text{ Soit } \psi: P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \int_0^1 P(x) dx \in \mathbb{C}. \text{ Déterminer la matrice de } \psi \text{ dans les bases canoniques.}$$

$$3. \text{ Soit } P_1 = 3X + 2 \text{ et } P_2 = 2X + 3. \text{ Montrer que } (P_1, P_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X] \text{ et donner la matrice de } f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X]) \text{ définie par } f(P) = P' \text{ dans cette base.}$$

**Exercice 6.** Pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $\varphi(P) = (X^2 - X + 1)P' - (2X - 1)P + X^2P(1)$ .

$$1. \text{ Montrer que } \varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].$$

$$2. \text{ Déterminer la matrice de } \varphi \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_2[X].$$

$$3. \text{ Est-ce que } \varphi \text{ est un automorphisme?}$$

**Exercice 7.** On considère l'application  $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_m[X]$  dont la matrice dans les bases canoniques est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$1. \text{ Que valent } m \text{ et } n?$$

$$2. \text{ Soit } P \in \mathbb{R}_n[X]. \text{ Déterminer l'expression de } f(P).$$

**Exercice 8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$  définie par  $\varphi(M) = AM - MA$ .

Déterminer la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 9.** Soit  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $d : f \in E \mapsto f' \in E$ . On note  $F = \text{Vect}(\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$ .

- (a) Donner la dimension de  $F$  et montrer que  $F$  est stable par  $d$ . On note  $\varphi \in \mathcal{L}(F)$  l'endomorphisme induit par  $d$ .  
 (b) Écrire la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$ . Calculer  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 (c) Montrer que  $\varphi$  est un automorphisme et écrire  $M^{-1}$ .
- Déterminer  $\ker(\varphi - \text{id}_F)$  et  $\text{Im}(\varphi - \text{id}_F)$  en utilisant  $M$ .  
 En déduire les solutions dans  $F$  de  $y' - y = e^{-t} + \sin(t)$ .

**Exercice 10.** 1. Soit  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$  défini par  $\varphi(P) = P(X + 1)$ . Donner la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  puis calculer  $A^{-1}$ .

- Soit  $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_6[X])$  défini par  $\psi(P) = P(1 - X)$ . Donner la matrice  $B$  de  $\psi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_6[X]$  puis calculer  $B^{-1}$ .

**Exercice 11.** 1. Montrer que  $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

- Montrer que  $S = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  d'une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques.

**Exercice 12.** Soit  $E$  de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

- Justifier qu'il existe  $x \in E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$ .
- On se donne un tel  $x$ . Montrer que  $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  est une base de  $E$ .
- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 13.** Soient  $u = (0, 1, 1)$ ,  $v = (2, 0, -1)$  et  $w = (2, 1, 1)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

- Montrer que  $(u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Soit  $z = (4, -1, 1)$ . Déterminer les coordonnées de  $z$  dans la base  $(u, v, w)$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}^3$  dont les coordonnées dans la base  $(u, v, w)$  sont  $(-1, -8, 4)$ . Déterminer les coordonnées de  $x$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 14.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A$ . On pose  $f_1 = (1, 1, 1)$ ,  $f_2 = (1, -1, 0)$  et  $f_3 = (1, 0, 1)$ .

- Montrer que  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- En déduire  $A^n$ .

**Exercice 15.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $\varphi(P) = P + (X - a)P' + (X - a)^2P''$ . Montrer qu'il existe

une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 16.** 1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p$  un projecteur de  $E$ . On pose  $r = \text{rg}(p)$ . Montrer qu'il existe

une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$ .

Soit  $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  la symétrie par rapport au plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + y - z = 0$  parallèlement à la droite  $\mathcal{D} = \text{Vect}((-1, -1, 1))$ .

- Écrire la matrice de  $s$  dans une base adaptée à la somme directe  $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$ .
- En déduire la matrice de  $s$  dans la base canonique.

**Exercice 17.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . On considère  $f$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est donnée par  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer une base et la dimension de  $F = \ker(f - \text{id}_E)$ ,  $G = \ker(f - 2\text{id}_E)$  et  $H = \ker(f + 4\text{id}_E)$ .
2. Déterminer une base  $\mathcal{C}$  de  $E$  dans laquelle la matrice  $D$  de  $f$  est diagonale.
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer une expression de  $A^n$  faisant intervenir les matrices de passages de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 18 (CCP PC 2018).** On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

1. Donner une base de  $\text{Im}(A)$ .
2. Donner une base de  $\ker(A)$ .
3. Déterminer  $(Q, P) \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \times \text{GL}_4(\mathbb{R})$  tel que  $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
4. Déterminer la dimension de  $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0_{3,4}\}$ .

**Exercice 19.** Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  une matrice non nulle telle que  $M^2 = 0_2$ . Montrer que  $M$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 20 (Mines-Ponts PC 2018).** Soit  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ ,  $F_0 = 1$  et  $F_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Montrer que  $\mathcal{B} = (F_0, F_1, \dots, F_n)$  est une base de  $E_n$ .
2. Pour tout  $P \in E_n$ , on pose  $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$ . Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E_n$ .
3. Donner la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
4. Soit  $Q \in E_{n-1}$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in E_n$  tel que  $\Phi(P) = Q$  et  $P(0) = 0$ .
5. On prend  $n = 3$  et  $Q = X^2$ .
  - (a) Exprimer  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  - (b) En déduire  $P$  tel que  $\Phi(P) = X^2$  et  $P(0) = 0$ .
  - (c) En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^m k^2$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .

## Indications - Solutions

### Exercice 1 :

- $\varphi_A(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$ ,  $\ker(A) = \{(-y-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ ,  $\text{rg}(A) = 1$  et  $\text{Im}(A) = \text{Vect}((1, 1, 1))$ .
- $\varphi_B(x, y, z) = (-x+y+z, 3x-2y-4z, -2x+y+3z)$ ,  $\ker(B) = \text{Vect}((-2, -1, -1))$ ,  $\text{rg}(B) = 2$  et  $\text{Im}(B) = \text{Vect}((-1, 3, -2), (1, -2, 1))$ .
- $\varphi_C(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$ ,  $\ker(C) = \{0\}$ ,  $\text{rg}(C) = 3$  et  $\text{Im}(C) = \mathbb{R}^3$ .
- $\varphi_D(x, y, z, t) = (y-t, x+z, -y-t, -x-z)$ ,  $\ker(D) = \text{Vect}((1, 0, -1, 0))$ ,  $\text{rg}(D) = 3$  et  $\text{Im}(D) = \text{Vect}((0, 1, 0, -1), (1, 0, -1, 0), (-1, 0, -1, 0))$ .

### Exercice 2 :

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li><math>M = \begin{pmatrix} 2 &amp; 3 \\ 3 &amp; -5 \end{pmatrix}</math> qui est inversible, donc <math>f</math> est bijective.</li> <li><math>M = \begin{pmatrix} 2 &amp; -3 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> qui est inversible, donc <math>f</math> est bijective.</li> <li><math>M = \begin{pmatrix} 2 &amp; -1 \\ 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> qui est de rang 2, donc <math>f</math> est injective mais pas surjective.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li><math>M = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> qui est de rang 2, donc <math>f</math> est surjective mais pas injective.</li> <li><math>M = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> qui est de rang 2, donc <math>f</math> n'est ni injective, ni surjective.</li> </ol> |
|--|---|

### Exercice 3 :

- On résout l'équation  $AX = 4X$ , on trouve  $\text{Vect}((1, 0, 1))$ .
- $\text{Vect}((1, 2, -1))$ .
- Prenons  $e_2 = (1, 2, -1)$ . On résout  $AX - 2X = e_2$ . On trouve  $e_3 = (0, 1, 0)$ .
- On prend la base  $(e_1, e_2, e_3)$ !

### Exercice 4 :

- $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m-1 \\ 1 & 1-m & 0 \\ 1 & -1 & 2-m \end{pmatrix}$
- Pour  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$ .
- Pour  $m = 2$ ,  $\ker(A) = \text{Vect}((-1, -1, 1))$ . Pour  $m = 0$ ,  $\ker(A) = \text{Vect}((-1, 1, 1))$ . Pour  $m = -1$ ,  $\ker(A) = \text{Vect}((-2, 1, 1))$ . Sinon,  $\ker(A) = \{0\}$ .

### Exercice 5 :

- $\text{Mat}_{\text{can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- $\text{Mat}_{\text{can}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$ .
- Comme  $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$ , il suffit de vérifier que  $(P_1, P_2)$  est libre. Puis  $f(P_1) = 3 = \frac{3}{5}(3P_2 - 2P_1)$  et  $f(P_2) = 2 = \frac{2}{5}(3P_2 - 2P_1)$ .

### Exercice 6 :

- On applique la définition pour la linéarité. Puis,  $\varphi(P) = (X^2P' - 2XP) + ((1-X)P' + P + X^2P(1))$ , et  $\deg(X^2P' - 2XP) \leq 2$  (les coefficients dominants s'annulent) et  $\deg((1-X)P' + P + X^2P(1)) \leq 2$ .
- $\varphi(1) = X^2 - 2X + 1$ ,  $\varphi(X) = 1$  et  $\varphi(X^2) = 2X$ .
- On échelonne la matrice. On trouve  $\text{rg}(\varphi) = 3$  donc c'est un automorphisme.

### Exercice 7 :

- On a  $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = 4$  et  $\dim(\mathbb{R}_m[X]) = 3$  donc  $n = 3$  et  $m = 2$ .
- $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$  et  $f(P) = 3aX^2 + 2bX + c = P'$ .

**Exercice 8 :**  $\varphi(E_{11}) = -2E_{12} + 3E_{21}$ ,  $\varphi(E_{12}) = E_{12} - 3E_{21} - 3E_{22}$ ,  $\varphi(E_{21}) = 2E_{11} + 3E_{21} - 2E_{22}$  et  $\varphi(E_{22}) = 2E_{12} - 3E_{21}$ .

### Exercice 9 :

- (a) On vérifie que la famille  $(\sin, \cos, \text{ch}, \text{sh})$  est libre : on prend  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) + \lambda_3 \text{ch}(x) + \lambda_4 \text{sh}(x) = 0$ . En prenant  $x = 0$ ,  $x = \pi$  et  $x = -\pi$ , on trouve  $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$ , puis  $\lambda_4 = 0$  et enfin  $\lambda_1 = 0$ . Ainsi,  $\dim(F) = 4$ .

De plus,  $d(\sin) = \cos \in F$ ,  $d(\cos) = -\sin \in F$ ,  $d(\text{ch}) = \text{sh} \in F$  et  $d(\text{sh}) = \text{ch} \in F$ , donc  $F$  est stable par  $d$ .

- (b) D'après les valeurs trouvées ci-dessus :  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $d^2(\text{ch}) = \text{ch}$  et  $d^2(\text{sh}) = \text{ch}$ , donc pour

tout  $n$  pair,  $d^n(\text{ch}) = \text{ch}$  et  $d^n(\text{sh}) = \text{sh}$  et si  $n$  est impair,  $d^n(\text{ch}) = \text{sh}$  et  $d^n(\text{sh}) = \text{ch}$ .

De même si  $n = 4k$ ,  $d^n(\sin) = \sin$ ,  $d^n(\cos) = \cos$ ,  $d^{n+1}(\sin) = \cos$ ,  $d^{n+1}(\cos) = -\sin$ ,  $d^{n+2}(\sin) = -\sin$ ,  $d^{n+2}(\cos) = -\cos$ ,  $d^{n+3}(\sin) = -\cos$ , et  $d^{n+3}(\cos) = \sin$ .

Donc si  $n = 4k$ :  $M^n = I_4$ ,  $M^{n+1} = M$ ,  $M^{n+2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $M^{n+3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(c) On remarque que  $M^4 = I_4$ , donc  $M \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$  et  $M^{-1} = M^3$ .

2. On cherche  $\ker(M - I_4) = \text{Vect}((0, 0, 1, 1))$ , donc  $\ker(\varphi - \text{id}_F) = \text{Vect}(\text{ch} + \text{sh}) = \text{Vect}(\exp)$ .

Puis  $\text{Im}(M + I_4) = \text{Vect}((-1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$ , et  $\text{Im}(\varphi - \text{id}_F) = \text{Vect}(\cos - \sin, \sin + \cos, e^{-t})$ .

On a une solution particulière donnée par  $f_0 : t \mapsto \text{sh}(t) + \frac{1}{2}(\cos(t) - \sin(t))$  et la solution générale de l'équation homogène :

$f_h : t \mapsto C e^t$  pour  $C \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 10 :**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $\varphi^{-1}(P) = P(X - 1)$ , donc  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

2. On applique de nouveau Newton. On remarque aussi que  $\psi \circ \psi = \text{id}$ , donc  $\psi^{-1} = \psi$  et  $B^{-1} = B$ .

**Exercice 11 :**

1. On vérifie que  $P^2 = P$ .  $\ker(P) = \text{Vect}((1, 0, 0))$  et  $\text{Im}(P) = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$ .

2. On vérifie que  $S^2 = I_3$ .  $\ker(S - I_3) = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$  et  $\ker(S + I_3) = \text{Vect}((1, 0, 0))$ . On remarque aussi que  $S = 2P - I_3$ .

**Exercice 12 :**

1. Comme  $f^{n-1} \neq 0$ , il existe  $x \in E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$ .

2. Il suffit de montrer que  $\mathcal{B}$  est libre. En prenant une relation de liaison  $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$ , puis on applique  $f^{n-1}$  pour trouver  $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$ , donc  $\lambda_0 = 0$ . On reprend la relation et on applique  $f^{n-2}$  pour trouver  $\lambda_1 = 0$  et ainsi de suite.

3.  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 13 :**

1. On peut par exemple échelonner la matrice  $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  pour montrer que la famille est de rang 3.

2.  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base  $(u, v, w)$ . Pour trouver les coordonnées de  $z$  dans la base  $(u, v, w)$ , on calcule donc  $P^{-1}z = (-5, -2, 4)$ .

3. On calcule  $Px = (-8, 3, 11)$ .

**Exercice 14 :**

1. On pose  $P$  la matrice associée à  $(f_1, f_2, f_3)$  et on l'échelonne.

2. On applique la formule de changement de bases :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$

3.  $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 1 & -2^n - 1 \\ -2^n + 1 & 1 & 2^n - 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 15 :** On résout les quatre équations  $\varphi(P) = P$ ,  $\varphi(P) = 2P$ ,  $\varphi(P) = 5P$  et  $\varphi(P) = 10P$ . Pour cela, on écrit la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique puis on pose les systèmes. On trouve  $P_1 = 1$ ,  $P_2 = X - a$ ,  $P_5 = (X - a)^2$  et  $P_{10} = (X - a)^3$  qui forment la base voulue.

**Exercice 16 :**

1. D'après le cours,  $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ . On prend une base de  $E$  adaptée à la somme directe  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ , et la matrice de  $p$  dans cette base est bien de la forme voulue car pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $e_i \in \text{Im}(p)$ , donc  $p(e_i) = e_i$  et pour  $i \in \llbracket r + 1, n \rrbracket$ ,  $e_i \in \ker(p)$ , donc  $p(e_i) = 0_E$ .

2.  $\mathcal{P} = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, 1))$ . Dans la base  $\mathcal{B} = ((-1, -1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 1))$  la matrice de  $s$  est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Dans la base canonique, on obtient  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(s) = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 17 :**

1. On résout les systèmes idoinos :  $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ ,  $G = \text{Vect}(4e_1 + 3e_2 - 2e_3)$  et  $H = \text{Vect}(2e_1 - 3e_2 + 2e_3)$  qui sont tous les trois de dimension 1.
2. On prend  $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$ ,  $f_2 = 4e_1 + 3e_2 - 2e_3$  et  $f_3 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3$  qui forme bien une base de  $E$ . De plus,  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{diag}(1, 2, -4)$ .
3. On note  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ . Alors  $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 2, -4)$  d'après la question précédente. Puis,  $P^{-1}A^nP = \text{diag}(1, 2^n, (-4)^n)$ .

**Exercice 18 :**

1. On peut remarquer que les deux premières colonnes de  $A$  sont colinéaires, et que  $C_1 - C_4 = -3C_3$  et que  $C_1$  et  $C_4$  sont libres. Donc  $\text{Im}(A) = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 4, 6))$ , et les deux colonnes forment une base de  $\text{Im}(A)$ .
2. On a  $\dim(\ker(A)) = 4 - \text{rg}(A) = 2$  et  $(-1, 1, 0, 0) \in \ker(A)$  et  $(1, 0, 3, -1) \in \ker(A)$ . Les vecteurs  $(-1, 1, 0, 0)$  et  $(1, 0, 3, -1)$  sont linéairement indépendants, donc forment une base de  $\ker(A)$ .
3. On considère  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ . On pose  $e_1 = (1, 1, 0)$  et  $e_2 = (1, 4, 6)$ , qui sont dans l'image de  $u$ . On trouve ensuite  $f_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $f_2 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $f_3 = (-1, 1, 0, 0)$  et  $f_4 = (1, 0, 3, -1)$  de sorte que  $u(f_1) = e_1$ ,  $u(f_2) = e_2$ ,  $u(f_3) = u(f_4) = 0$ . On complète  $(e_1, e_2)$  en une base de  $\mathbb{R}^3$  avec  $e_3 = (0, 0, 1)$  par exemple. On prend  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  et  $Q$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(e_1, e_2, e_3)$ .
4. Notons  $C = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0\}$ . On a  $M \in C \iff MQQ^{-1}AP = 0_{3,4}$ . On commence donc par résoudre  $ND = 0_{3,4}$  avec  $D = Q^{-1}AP$ . On note  $N = (n_{ij})$  et on obtient

$$ND = 0_{3,4} \iff n_{11} = n_{2,1} = n_{31} = n_{21} = n_{22} = n_{32} = 0$$

Ainsi,  $M \in C \iff MQ = aE_{3,1} + bE_{3,2} + cE_{3,3} \iff M \in \text{Vect}(E_{3,1}Q, E_{3,2}Q, E_{3,3}Q)$ . On vérifie ensuite que les trois matrices sont libres car  $E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}$  sont libres et  $Q$  est inversible, donc  $\dim(C) = 3$ .

**Exercice 19 :** On note  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ . Alors  $u^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)}$ . Comme  $M$  est non nulle,  $u$  est non nul, donc il existe  $e \in \mathbb{C}^2$  tel que  $u(e) \neq 0_{\mathbb{C}^2}$ . De plus,  $u(e) \in \ker(u)$  car  $u^2(e) = 0_{\mathbb{C}^2}$ . Ainsi,  $(u(e), e)$  forme une famille libre donc une base de  $\mathbb{C}^2$ . La matrice de  $u$  dans cette base est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M$  est bien semblable à cette matrice.

**Exercice 20 :**

1. La famille est échelonnée en degrés, donc libre. Comme son cardinal est égal à la dimension de  $E_n$ , c'est une base de  $E_n$ .
2. Pour  $P \in E_n$ ,  $\deg(P(X+1) - P(X)) \leq n$ , donc  $\Phi(P) \in E_n$ . Puis, on vérifie la linéarité facilement.
3.  $\Phi(F_0) = 0$ ,  $\Phi(F_1) = 1$ , puis si  $k \geq 2$ ,  $F_k(X+1) - F_k(X) = \frac{(X+1)X \dots (X-k+2)}{k!} - \frac{X \dots (X-k+2)(X-k+1)}{k!} = \frac{X \dots (X-k+2)}{k!} (X + 1 - X + k - 1) = F_{k-1}$ . Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On remarque que d'après la question précédente,  $\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(F_0, \dots, F_{n-1}) = E_{n-1}$ . On pose  $H = \{P \in E_n \mid P(0) = 0\}$ . C'est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc un hyperplan de  $E_n$ . De plus,  $\ker(\Phi) = \text{Vect}(F_0)$  est un supplémentaire de  $H$  dans  $E_n$ . D'après le théorème du rang (version géométrique),  $\Phi_S : H \rightarrow E_{n-1}$  est un isomorphisme.

5. (a)  $F_2 = \frac{X^2 - X}{2}$ ,  $F_1 = X$  et  $F_0 = 1$ , donc  $Q = 2F_2 + F_1$ .  
 (b) On a  $\Phi(F_3) = F_2$  et  $\Phi(F_2) = F_1$ , donc en posant  $P = 2F_3 + F_2$ , on trouve  $\Phi(P) = X^2$  et  $P(0) = 0$ .  
 (c) On obtient donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(k+1) - P(k) = k^2$ . En sommant de 0 à  $m$ ,

$$\sum_{k=0}^m k^2 = \sum_{k=0}^m P(k+1) - P(k) = P(m+1) - P(0) = 2 \frac{(m+1)m(m-1)}{6} + \frac{(m+1)m}{2} = \frac{m(m+1)(2m-2+3)}{6}.$$