# Chapitre 27 : Variables aléatoires

Dans tout le chapitre, $(\Omega, P)$ est un espace probabilisé fini : c'est l'univers d'une expérience aléatoire.

## I. Variables aléatoires et lois de probabilité

### I.1. Variables aléatoires et évènements

> **Définition I.1.** Une **variable aléatoire** sur $\Omega$ à valeurs dans un ensemble $E$ est une fonction $X : \Omega \to E$.
> On note alors $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par $X$.

**Exemple I.1.** Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et avec remise 4 boules. On note alors $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées à la fin de l'expérience.
Au minimum, on aura tiré 0 boule blanche et au maximum 4 boules blanches. Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles. Ainsi $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$.

> **Définition I.2.** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
> - Si $A \subset E$, on note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$ l'évènement $X^{<-1>}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.
> - Lorsque $x \in E$, on note $(X = x)$ au lieu de $(X \in \{x\})$. C'est l'évènement « $X$ prend la valeur $x$ ».
> - Si $E = \mathbb{R}$, on note aussi $(X \leq x)$ au lieu de $(X \in ]-\infty, x])$. C'est l'évènement « $X$ prend une valeur inférieure ou égale à $x$ ».

**Exemple I.2.** On reprend l'exemple I.1.
- L'évènement « on a tiré une seule boule blanche » s'écrit $(X = 1)$.
- L'évènement « on a tiré au moins une boule blanche » s'écrit $(X \geq 1)$. Son contraire est $(X < 1) = (X = 0)$ : « on n'a pas tiré de boule blanche ».
- L'évènement « on a tiré entre une et trois boules blanches » s'écrit $(1 \leq X \leq 3)$.

> **Proposition I.1.** *Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. La famille d'évènements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements de $\Omega$.*

### I.2. Loi de probabilité

> **Définition I.3.** Soit $X$ une variable aléatoire sur $(\Omega, P)$ à valeurs dans $E$. La **loi de probabilité** de $X$ est l'application
> $$P_X : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A). \end{array}$$
> C'est une probabilité sur $X(\Omega)$

> **Proposition I.2.** *Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. La famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilité sur $X(\Omega)$. Elle détermine complètement la loi de $X$.*

**Méthode.** Pour déterminer la loi de probabilité de $X$, il suffit de donner :
- l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par $X$ ;
- les probabilités $P(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$.

**Exemple I.3.** On reprend l'exemple I.1. On a toujours $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$. Puis, pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, $P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$.
En effet, il y a $\binom{4}{k}$ tirages qui donnent $k$ boules blanches et chacun a pour probabilité $\left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$. Donc la loi de $X$ est :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{81}{625}$ | $\frac{216}{625}$ | $\frac{216}{625}$ | $\frac{96}{625}$ | $\frac{16}{625}$ |

**Notation I.1.** Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires à valeurs dans un même ensemble $E$, on note $X \sim Y$ si $P_X = P_Y$. En particulier, $X$ et $Y$ prennent les mêmes valeurs, mais ne sont pas forcément définies sur le même univers.

**Définition I.4.** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$ et $A$ un évènement de $\Omega$ tel que $P(A) > 0$. On appelle **loi conditionnelle de $X$ sachant $A$** la loi de $X$ pour la probabilité $P_A$, c'est-à-dire l'application $B \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \mapsto P_A(X \in B) \in [0,1]$.

### I.3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

**Définition I.5.** Soit $X$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $f(X)$ la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f(X)(\omega) = f(X(\omega)).$$

C'est l'**image de $X$ par $f$**.

**Proposition I.3.** *En notant $Y = f(X)$, on a $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et $\forall y \in Y(\Omega)$, $P(Y = y) = P(X \in f^{<-1>}(\{y\}))$.*

**Exemple I.4.** Reprenons l'exemple I.1. Considérons la variable aléatoire $Y = X^2 - 2X$. Lorsque $X$ prend les valeurs $0, 1, 2, 3$ et 4, $Y$ prend les valeurs $0, -1, 0, 3$ et 8. La loi de $Y$ est donc :

| $k$ | -1 | 0 | 3 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{216}{625}$ | $\frac{297}{625}$ | $\frac{96}{625}$ | $\frac{16}{625}$ |

**Proposition I.4.** *Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.*

## II. Lois usuelles

### II.1. Loi certaine

**Définition II.1.** On dit que la variable aléatoire $X$ suit une **loi certaine** s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.

### II.2. Loi uniforme

**Définition II.2.** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. On dit que $X$ suit une **loi uniforme** sur $E$, et on note $X \sim \mathscr{U}(E)$, si $X(\Omega) = E$ et

$$\forall x \in E, P(X = x) = \frac{1}{n}.$$

**Exemple II.1.** La variable aléatoire qui donne le résultat du lancer d'un dé équilibré suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

### II.3. Loi de Benoulli

**Définition II.3.** On dit que la variable aléatoire $X$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0,1]$, et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p.$$

*Remarque II.1.* Une épreuve de Bernoulli est une expérience qui n'a que deux issues : le succès (avec probabilité $p$) ou l'échec (avec probabilité $1 - p$).
Si $X$ est une variable aléatoire qui vaut 1 lorsque l'épreuve est un succès et 0 sinon, alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

**Exemples II.2.**

1. La variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile lors d'un lancer d'une pièce équilibrée et 0 sinon suit la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. On tire au hasard une boule dans une urne qui contient $a$ boules rouges et $b$ boules bleues. On considère la variable aléatoire $X$ qui vaut 1 lorsqu'on tire une boule rouge et 0 sinon. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(\frac{a}{a+b}\right)$.
3. Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $\mathbb{1}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$.

### II.4. Loi binomiale

**Définition II.4.** Soit $X$ une variable aléatoire et $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. On dit que $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, et on note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, si $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

*Remarque II.2.* Si on réalise une succession de $n$ épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $p$, alors la variable aléatoire qui compte le nombre total de succès suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.
Par exemple, lorsqu'on réalise $n$ tirages avec remise dans une urne qui contient une proportion $p$ de boules blanches, alors la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues suit $\mathscr{B}(n,p)$.

**Exemples II.3.**

1. On lance $n$ fois une pièce équilibrée et on note $X$ le nombre de piles obtenus. Alors $X \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
2. Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires. On tire successivement et avec remise 10 boules et on note $X$ le nombre de boules blanches tirées.
   On a ici 10 répétitions indépendantes (car il y a remise) de l'épreuve de Bernoulli : on tire une boule. Le succès est : la boule tirée est blanche, dont la probabilité est $\frac{1}{3}$.
   Ainsi $X \sim \mathscr{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$.

## III. Espérance, variance et écart-type

### III.1. Espérance

**Définition III.1.** Soit $X : \Omega \to \mathbb{K}$ une variable aléatoire. L'**espérance** de $X$ est le nombre :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x).$$

Si $E(X) = 0$, on dit que $X$ est une variable **centrée**.

*Remarques III.1.*

- L'espérance de $X$ s'interprète comme la valeur moyenne prise par $X$ lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. En effet, la fréquence d'apparition de chaque valeur $x$ de $X$ est environ égale à la probabilité $P(X=x)$, et l'espérance consiste à faire la moyenne du tableau valeurs/fréquences :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| valeur | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ | Moyenne |
| fréquence | $P(X=x_1)$ | $P(X=x_2)$ | ... | $P(X=x_n)$ | $x_1 P(X=x_1) + \ldots + x_n P(X=x_n)$ |

  L'espérance est un indicateur de position.
- Si $X \sim Y$, alors $E(X) = E(Y)$.

**Exemple III.1.** Reprenons l'exemple I.1. On a :

$$E(X) = 0 \times \frac{81}{625} + 1 \times \frac{216}{625} + 2 \times \frac{216}{625} + 3 \times \frac{96}{625} + 4 \times \frac{16}{625} = \frac{8}{5}.$$

Ainsi, si on répète beaucoup de fois les tirages, on aura en moyenne 1,6 boules blanches par expérience.

**Proposition III.1.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

1. *L'espérance est linéaire : pour tous $a, b \in \mathbb{K}$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.*
2. *Inégalité triangulaire : $|E(X)| \leq E(|X|)$.*

**Proposition III.2.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles sur $\Omega$.*

1. *L'espérance est positive : si $X$ ne prend que des valeurs positives, alors $E(X) \geq 0$.*
2. *L'espérance est croissante : si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.*

**Proposition III.3.**

1. *Si $X$ suit la loi certaine de valeur $a$ alors $E(X) = a$.*
2. *Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ et $n = b - a + 1$, alors $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.*
3. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $E(X) = p$.*
4. *Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.*

**Exemple III.2.** Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, alors $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$.

**Théorème III.4 (Formule de transfert)**

*Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.*

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$$

*Remarque III.2.* On n'a donc pas besoin de connaître la loi de $f(X)$ pour trouver son espérance.

**Théorème III.5 (Inégalité de Markov)**

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle à valeurs positives. Pour tout $a > 0$,*

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

## III.2. Variance et écart-type

**Définition III.2.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. La **variance** de $X$ est le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

L'**écart-type** de $X$ est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Lorsque $V(X) = 1$, on dit que $X$ est **réduite**.

*Remarques III.3.*

- Si $X \sim Y$, alors $V(X) = V(Y)$.
- La variance mesure la moyenne des carrés des écarts de $X$ à sa moyenne. C'est un indicateur de dispersion.

**Théorème III.6**

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle.*

1. ***Formule de Huygens :*** *$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*
2. ***Transfert affine :*** *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.*

**Exemple III.3.** Reprenons l'exemple I.1. Nous avons déjà calculé $E(X) = \frac{8}{5}$. En utilisant la formule de transfert, on trouve $E(X^2) = \frac{88}{25}$. Donc $V(X) = \frac{88}{25} - \frac{64}{25} = \frac{24}{25}$.

**Proposition III.7.**
1. *Si $X$ suit une loi certaine, alors $V(X) = 0$.*
2. *Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.*
3. *Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $V(X) = p(1-p)$.*
4. *Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X) = np(1-p)$.*

*Remarque III.4.* Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.

**Théorème III.8 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle et $a \in ]0, +\infty[$, alors $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$.*

*Remarque III.5.* Ainsi, lorsque plus la variance de $X$ est petite, plus la probabilité que $X$ soit éloigné de sa moyenne est petite.

# IV. Couples de variables aléatoires

## IV.1. Loi conjointe, lois marginales

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. Le couple $(X, Y)$ est une variable aléatoire sur $\Omega$ : $(X, Y) : \omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in E \times F$. On notera en général $P(X = x, Y = y)$ à la place de $P((X, Y) = (x, y))$.

**Définition IV.1.** Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires sur $\Omega$.
1. La **loi conjointe** de $X$ et $Y$ est la loi du couple $(X, Y)$. Elle est déterminée par la distribution de probabilité $(P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
2. Les lois de $X$ et $Y$ sont appelées les **lois marginales** du couple $(X, Y)$.

*Remarque IV.1.* On peut généraliser ces définitions à un $n$-uplet de variables aléatoires !

**Proposition IV.1.** *Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires sur $\Omega$. Les lois marginales sont données par :*

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$
$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

*Remarque IV.2.* Attention : on ne peut pas en général retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales !

**Proposition IV.2.** *Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs réelles sur $\Omega$ et $Z = X + Y$. La loi de $Z$ est donnée par :*

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P(Z = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = z - y, Y = y).$$

## IV.2. Indépendance

**Définition IV.2.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur $\Omega$. On dit que $X$ et $Y$ sont **indépendantes**, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$ si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants : $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

**Proposition IV.3.** *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur $\Omega$.*

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

*Remarque IV.3.* Lorsque $X$ et $Y$ sont indépendantes, les lois marginales suffisent pour retrouver la loi conjointe de $(X, Y)$.

**Proposition IV.4.** *Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ et $f : E \to E'$ et $g : F \to F'$. Alors si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$.*

**Proposition IV.5.** *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur $\Omega$ et à valeurs réelles. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

*Remarque IV.4.* Attention, la réciproque est fausse!

**Définition IV.3.** Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $\Omega$. On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $A_1 \in \mathscr{P}(X_1(\Omega))$, ..., $A_n \in \mathscr{P}(X_n(\Omega))$, les événements $(X_1 \in A_1)$, ..., $(X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

**Proposition IV.6.** *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $\Omega$. Elles sont mutuellement indépendantes ssi pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n).$$

*Remarque IV.5.* Si des variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes, mais la réciproque n'est pas vraie.

**Proposition IV.7.** *Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et mutuellement indépendantes, alors $E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1)E(X_2) \cdots E(X_n)$.*

**Proposition IV.8.** *Soit $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que $\forall k \in [\![1, n]\!], X_k \sim \mathscr{B}(p)$. Alors la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.*

*Remarque IV.6.* On retrouve plus facilement que si $S \sim \mathscr{B}(n, p)$ alors $E(S) = np$

**Proposition IV.9 (Lemme des coalitions).** *Soit $n \geq 2$. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $\Omega$ et à valeurs dans $E_1, \dots, E_n$. Soit $m \in [\![1, n-1]\!]$ et $f : E_1 \times \cdots E_m \to F$ et $g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \to F'$. Alors si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, $f(X_1, \dots X_m)$ et $f(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.*

*Remarque IV.7.* Cette proposition est encore valable si on fait plus de deux coalitions.

### IV.3. Covariance

**Définition IV.4.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles sur $\Omega$. La **covariance** de $X$ et $Y$ est le réel $\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$.
On dit que $X$ et $Y$ sont **décorrélées** si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

**Proposition IV.10.** *Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles sur $\Omega$.*

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ *;*
2. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$ *;*
3. *Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X$ et $Y$ sont décorrélées : en particulier, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.*

*Remarques IV.8.*

- Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles sur $\Omega$, alors $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.
- Attention, deux variables décorrélées ne sont pas forcément indépendantes!
- On retrouve facilement la variance de la loi binomiale.