

Colles 29 - 01/06/2026 au 05/06/2026**Thèmes traités en classe**

- Chapitre 25 : Intégration.
Exercices traités en classe : II.4, II.6, II.8, II.9, II.10, II.11, II.12, III.2, IV.1.
- Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires.
Exercices traités en classe : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 16, 17.
- Chapitre 27 : Variables aléatoires.
 1. Définition, loi, image d'une variable aléatoire.
 2. Espérance : définition, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, formule de transfert, inégalité de Markov.
 3. Variance, écart-type : définition, formule de Huygens, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
 4. Lois usuelles, espérances et variances.
 5. Couples de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales.
 6. Indépendance : définition, lemme des coalitions, espérance d'un produit de variables indépendantes.
 7. Covariance : définition, variance d'une somme.

Pas d'exercice sur ce chapitre**Questions de cours****Question 1**

- C25 Exercice II.4 :
 1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.
 2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
 3. Déterminer la limite et un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- C25 Exercice II.9 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.
 1. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
 3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- C25 Exercice II.11 : Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$ en utilisant la fonction $P : x \mapsto \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 dt$.
- C25 Exercice II.10 : soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t) e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Exemple du cours : calculer la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$ en utilisant des sommes de Riemann.
- C25 Exercice IV.1.3 : en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
- Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice. Montrer que c'est une application linéaire.
- Donner la définition de noyau et image d'une matrice. Montrer que l'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.
- Soit \mathcal{B}_E une base de E et \mathcal{B}_F une base de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Montrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$.

- Donner la définition de matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} , énoncer la formule de changement de base pour une application linéaire.
- C26 Exercice 11 : Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 d'un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.
- C26 Exercice 12 : soit E de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
 - ▷ Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
 - ▷ Donner la matrice de f dans cette base.
- C26 Exercice 17 : soit E de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
 - ▷ Déterminer une base de $F = \ker(f - \text{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\text{id}_E)$ et $H = \ker(f + 4\text{id}_E)$.
 - ▷ Déterminer une base \mathcal{C} de E dans laquelle la matrice de f est diagonale et préciser les matrices de passage entre \mathcal{B} et \mathcal{C} et la relation entre toutes ces matrices.
- Rappeler les lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale) et leurs espérances et variances. Démontrer la formule pour l'espérance d'une uniforme et d'une binomiale.
- Énoncer la formule de transfert puis exemple du cours : soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
- Donner la définition de la variance et démontrer la formule de Huygens.
- Énoncer les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. Démontrer Markov.

Questions 2 et 3

- Énoncer une définition sur les thèmes traités en classe.
- Énoncer un des résultats suivants :
 - ▷ Propriétés de l'intégrale : positivité, croissance, inégalité triangulaire.
 - ▷ Théorème fondamental de l'analyse.
 - ▷ Stricte positivité.
 - ▷ Intégration et parité.
 - ▷ Théorème de convergence des sommes de Riemann.
 - ▷ Inégalité de Taylor-Lagrange.
 - ▷ Formule pour la matrice d'une composée.
 - ▷ Conditions équivalentes pour l'inversibilité d'une matrice carrée.
 - ▷ Matrice d'une projection/symétrie dans une base adaptée.
 - ▷ Formule de changement de bases.
 - ▷ Lien rangs : Matrice/application linéaire, matrice/famille de vecteurs.
 - ▷ Propriétés de l'espérance : linéarité, inégalité triangulaire, positivité, croissance.
 - ▷ Espérances et variances des lois usuelles (uniforme, Bernoulli, binomiale).
 - ▷ Formule de transfert.
 - ▷ Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
 - ▷ Formule de Huygens.
 - ▷ Loi de la somme de deux variables aléatoires en fonction de la loi conjointe.
 - ▷ Lemme des coalitions.

A savoir faire

1. Savoir calculer une intégrale.
2. Savoir encadrer une intégrale.
3. Savoir utiliser le théorème fondamental de l'analyse.
4. Savoir calculer la limite d'une somme de Riemann.
5. Savoir appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

6. Savoir déterminer l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
7. Savoir déterminer le noyau et l'image d'une matrice.
8. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases.
9. Savoir faire un changement de bases.