

## Chapitre 28 : Séries numériques

### I. Généralités

#### I.1. Définitions

**Définition I.1.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique.

- La **série de terme général**  $(u_n)$  est la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On note cette série  $\sum u_n$  ou encore  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .
- Les  $S_n$  sont les **sommes partielles** de la série.
- On dit que la série **converge** lorsque la suite des sommes partielles converge et on note alors :  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$ . On appelle cette valeur la **somme** de la série.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.
- Déterminer la **nature** d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente.

*Remarque I.1.* L'idée derrière les séries est de calculer la somme de tous les termes d'une suite  $(u_n)$ . Comme il y en a une infinité, on y va progressivement et on considère donc les sommes partielles (on ne somme qu'un nombre fini de termes jusqu'au rang  $n$ ). On veut alors savoir ce qu'il se passe lorsqu'on prend de plus en plus de termes ( $n \rightarrow +\infty$ ) :

- est-ce que ces sommes partielles tendent vers une limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ? C'est le problème de la convergence de la série;
- s'il y a convergence, que vaut la limite (c'est-à-dire la somme de tous les termes de la suite)?

Quand on parle de série de terme général  $u_n$ , on a donc, cachée derrière, la suite des sommes partielles (qu'on peut parfois oublier comme on oublie l'univers en probabilités).

#### I.2. Premiers exemples

**Définition I.2.** On appelle **série géométrique** une série de terme général  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour un certain  $a \in \mathbb{K}$ .

##### **Théorème I.1**

Soit  $a \in \mathbb{K}$ . La série géométrique  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$ . Dans ce cas,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ .

**Définition I.3.** On appelle **série exponentielle** une série de terme général  $\left(\frac{z^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  pour un certain  $z \in \mathbb{K}$ .

##### **Théorème I.2**

Soit  $z \in \mathbb{K}$ . La série exponentielle  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ .

#### I.3. Premières propriétés

## II. Séries à termes positifs

**Proposition I.3.** Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries convergentes et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Alors la série  $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$  converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

*Remarque I.2.* Attention, la réciproque est fautive!! Il faut donc toujours faire attention lorsqu'on casse une somme en deux à vérifier que chaque terme converge.

**Proposition I.4.** Deux séries qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes ont la même nature.

**Définition I.4.** Soit  $\sum u_n$  une série convergente. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{n \geq p+1} u_n$  est une série convergente. On note  $R_p =$

$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$  le **reste d'ordre  $p$**  de la série.

**Lemme I.1.** Soit  $\sum u_n$  une série convergente. Alors

1.  $\forall n \geq 1, u_n = R_{n-1} - R_n$ .
2.  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

### Théorème I.5

Soit  $\sum u_n$  une série convergente. Alors  $(u_n)$  converge vers 0.

*Remarque I.3.* Attention, la réciproque est TRES fautive!!

**Proposition I.6.** La série **harmonique**  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

**Définition I.5.** Si  $(u_n)$  ne converge pas vers 0, alors on dit que la série  $\sum u_n$  **diverge grossièrement**.

### Théorème I.7

Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . La suite  $(u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

## II. Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, les termes généraux des séries sont à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

### II.1. Critères de convergence

#### Théorème II.1

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles est croissante.  
En particulier, la série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

### III. Séries absolument convergentes

Remarque II.1. Si la série diverge, alors  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , et on s'autorise à écrire  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

#### Théorème II.2

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq N_0, u_n \leq v_n$ .

1. Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge.

Remarque II.2. Si  $N_0 = 0$  et  $\sum v_n$  converge, alors on a de plus,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

#### Théorème II.3

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites positives telle que  $u_n \sim v_n$ . Alors les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont la même nature.

## II.2. Comparaison série-intégrale

**Définition II.1.** On appelle **série de Riemann** une série de la forme  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

#### Théorème II.4

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Méthode.**

- Si  $\alpha > 1$  et  $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ , alors  $\sum u_n$  converge.
- Si  $\alpha \leq 1$  et  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$ , alors  $\sum u_n$  diverge.

#### Théorème II.5

Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue et monotone.

- Si  $f$  est croissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_1^{n+1} f(t) dt.$$

- Si  $f$  est décroissante alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$

Remarque II.3. Plutôt que de savoir par coeur le théorème précédent, il faut plutôt savoir retrouver ces encadrements dans des cas particuliers, comme on a fait pour les séries de Riemann.

## III. Séries absolument convergentes

**Définition III.1.** On dit qu'une série numérique  $\sum u_n$  est **absolument convergente** si la série  $\sum |u_n|$  converge. On dit alors que la suite  $(u_n)$  est **sommable**.

### III. Séries absolument convergentes

Remarque III.1. • On pourra noter  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$  lorsque la suite  $(u_n)$  est sommable.

- Les résultats du paragraphe précédent s'appliquent toujours à la série  $\sum |u_n|$ .

#### **Théorème III.1**

Soit  $(u_n)$  une suite numérique. Si  $\sum u_n$  converge absolument, alors  $\sum u_n$  converge. De plus,  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

Remarque III.2. Attention, la réciproque est fausse!!

#### **Théorème III.2**

Soit  $\sum u_n$  une série numérique et  $\sum v_n$  une série à termes positifs. Si  $u_n = O(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est absolument convergente.