

## Séries numériques - Exercices

**Exercice 1.** Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	5. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$	9. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$
2. $\sum_{n \geq 1} (1 - e^{-\frac{1}{n^2}})$	6. $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$	10. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n) + \arctan(n)}{n+1}$
3. $\sum_{n \geq 2} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right)$	7. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$	11. $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$
4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln(n)}$	8. $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$	12. $\sum_{n \geq 0} n^{10} e^{-n^2}$

**Exercice 2.** Pour quelles valeurs de  $x$  les séries de termes généraux suivants convergent ?

1. $u_n = \frac{\sin(nx)}{n^2}$	2. $v_n = nx^n$ .
---------------------------------	-------------------

**Exercice 3.** 1. Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ . Montrer que les suites  $(S_{2p})$  et  $(S_{2p+1})$  sont adjacentes.

2. Pour quelles valeurs de  $x$  la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  converge-t-elle ?

**Exercice 4.** Justifier la convergence puis calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$	2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$	3. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^{3n-2}}{3^{2n+1}}$	4. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{n!}$
--	--------------------------------------	---	--

**Exercice 5.** 1. Justifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$  converge. On note  $S$  sa somme.

2. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

3. En déduire la valeur de  $S$ .

4. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 6.** Pour quelles valeurs de  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$  la série  $\sum_{n \geq 2} (a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2})$  converge-t-elle ? Donner la somme dans ces cas.

**Exercice 7.** 1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}$  converge. On note  $S$  sa somme.

2. Soit  $N \geq 1$  et  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^N x^n$ . Pour  $x \neq 1$ , déterminer une expression sans  $\sum$  de  $f(x)$  puis de  $f'(x)$ .

3. En déduire la valeur de  $S$ .

**Exercice 8.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ .

1. Déterminer un équivalent de  $(u_{n+1} - u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel noté  $\gamma$ .

3. En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge et déterminer un équivalent de ses sommes partielles.

**Exercice 9.** On pose  $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$  pour  $n \geq 1$ .

1. Déterminer la nature de la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ .

2. En déduire qu'il existe  $C > 0$  tel que :  $n! \sim C\sqrt{n}n^n e^{-n}$ .

3. On a démontré dans le chapitre sur l'intégration que :  $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+2)}}$ .  
Déterminer la valeur de  $C$ .

**Exercice 10.** 1. Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

- (a) Si  $|\ell| < 1$ , montrer que la série  $\sum u_n$  converge.  
 (b) Si  $|\ell| > 1$ , montrer que la série  $\sum u_n$  diverge.  
 (c) Donner un exemple de suite  $(u_n)$  telle que  $\ell = 1$  et la série  $\sum u_n$  diverge, puis un exemple avec  $\ell = 1$  et la série  $\sum u_n$  converge.

2. Déterminer la nature de la série  $\sum \frac{n!}{n^n} a^n$  pour  $a > 0$ .

**Exercice 11 (Séries de Bertrand).** On considère la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels fixés.

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  la série diverge-t-elle grossièrement?  
 2. Montrer que si  $\alpha > 1$ , alors la série converge quelle que soit la valeur de  $\beta$ .  
 3. Montrer que si  $\alpha < 1$ , alors la série diverge quelle que soit la valeur de  $\beta$ .  
 4. On suppose maintenant que  $\alpha = 1$ .  
 (a) Si  $\beta \leq 0$ , montrer que la série diverge.  
 (b) On suppose que  $\beta > 0$ .

i. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$  est strictement décroissante sur  $[2, +\infty[$ .

ii. En déduire la nature de la série.

5. Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n})$ ?

**Exercice 12.** Soit  $\alpha > 1$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que la série  $\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k^\alpha}$  converge.

On note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

2. Soit  $a > 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$ .  
 3. En déduire un équivalent simple de  $R_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
 4. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série  $\sum R_n$  converge-t-elle?

**Exercice 13.** On pose  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ .

1. Montrer que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.  
 2. Déterminer un équivalent de  $u_{n+1} - u_n$  à l'aide de  $u_n$   
 3. Quelle est la nature de la série  $\sum u_n^2$ ?  
 4. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n$ . On pourra poser  $v_n = \ln(u_n)$  en justifiant l'existence.

**Exercice 14.** Pour  $\alpha > 1$ , on pose  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer la limite de  $(1 - \alpha)\zeta(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $1^+$ .  
 2. En déduire un équivalent de  $\zeta(\alpha)$  lorsque  $\alpha \rightarrow 1^+$ .

**Exercice 15.** On considère  $A$  l'ensemble des entiers naturels non nuls qui s'écrivent sans le chiffre 9. On note  $(u_n)$  la suite croissante des éléments de  $A$ .

1. Soit  $m \geq 1$ . Déterminer le nombre de chiffres de  $m$  en fonction de  $m$ .  
 2. Soit  $n \geq 0$ . On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$ . Justifier que  $S_n \leq \sum_{k=1}^{[\log_{10}(u_n)]+1} \frac{9^k}{10^{k-1}}$ .  
 3. En déduire que la série  $\sum \frac{1}{u_n}$  converge.