

## Chapitre 29 : Espaces préhilbertiens réels

### I. Produit scalaire

#### I.1. Définition

**Définition I.1.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Un **produit scalaire** sur  $E$  est une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \langle x, y \rangle \end{cases}$$

vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. **bilinéarité** :  $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$  et  $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle$
2. **symétrie** :  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. **positivité** :  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$
4. **séparation / définie positivité** :  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$ .

On dit alors que le couple  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un **espace préhilbertien réel**. Lorsque  $E$  est de dimension finie, on l'appelle plutôt un **espace euclidien**.

*Remarque I.1.* On peut aussi voir la notation  $(x|y)$  ou bien  $x \cdot y$  pour le produit scalaire.

#### I.2. Exemples

**Proposition I.1.** L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  associe :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ , appelé le **produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$** .

*Remarque I.2.* En identifiant  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , le produit scalaire canonique s'écrit :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = X^T Y.$$

**Proposition I.2.** L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un produit scalaire.

**Proposition I.3.** L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

est un produit scalaire.

#### I.3. Norme associée à un produit scalaire

**Dans toute la suite,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.**

**Définition I.2.** L'application

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{cases}$$

## II. Orthogonalité

est appelée **norme associée au produit scalaire**.

Un vecteur  $x \in E$  est dit **unitaire** si  $\|x\| = 1$ .

La **distance** entre deux vecteurs  $x, y \in E$  est le réel  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Proposition I.4.** 1.  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$  (c'est la **séparation** de la norme).

2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (c'est l'**homogénéité** de la norme).

3. **Identités remarquables** :  $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$  et  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$ .

4. **Formule de polarisation** :  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ .

5. **Identité du parallélogramme** :  $\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ .

**Proposition I.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).**

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Proposition I.6 (Inégalité triangulaire).**

$$\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

De plus, il y a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont positivement liés, i.e. ssi  $y = 0_E$  ou bien il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tels que  $x = \lambda y$ .

**Corollaire I.7.**

$$\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

## II. Orthogonalité

### II.1. Vecteurs orthogonaux

**Définition II.1.** • Soit  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

- On dit qu'une famille  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs de  $E$  est **orthogonale** si les vecteurs sont orthogonaux deux à deux :  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$ .
- On dit qu'une famille de vecteurs de  $E$  est **orthonormale** ou (**orthonormée**) si elle est orthogonale et tous les vecteurs sont unitaires.

**Théorème II.1 (Pythagore)**

- Soit  $x, y \in E$  deux vecteurs. Alors  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  ssi  $x$  et  $y$  sont orthogonaux.
- Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille orthogonale, alors  $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$ .

**Proposition II.2.** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Alors la famille  $\left( \frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right)$  est orthonormale.

*Remarque II.1.* Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs. L'hypothèse de non nullité est donc importante!

**Proposition II.3.** Une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

## II.2. Orthogonal d'une partie

**Définition II.2.** Soit  $A \subset E$  une partie non vide. L'**orthogonal** de  $A$  est l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}.$$

C'est l'ensemble des vecteurs de  $E$  qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de  $A$ .

**Proposition II.4.** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides.

1.  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Si  $A = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ , alors

$$x \in A^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0.$$

3.  $E^\perp = \{0_E\}$  et  $\{0_E\}^\perp = E$ .

**Proposition II.5.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe.

## III. Espaces euclidiens

On suppose dans ce paragraphe que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien.

### III.1. Bases orthonormées

**Définition III.1.** On dit qu'une base de  $E$  est orthogonale (resp. orthonormale) si c'est une famille orthogonale (resp. orthonormale).

#### Théorème III.1

Soit  $E$  un espace euclidien.  $E$  admet une base orthonormale.

**Proposition III.2.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . Soit  $x, y \in E$ .

1.  $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$
2.  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle y, e_1 \rangle + \dots + \langle x, e_n \rangle \langle y, e_n \rangle$
3.  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2} = \sqrt{\langle x, e_1 \rangle^2 + \dots + \langle x, e_n \rangle^2}$
4. Si  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ , alors  $\langle x, y \rangle = X^\top Y$  et  $\|x\| = \sqrt{X^\top X}$ .

## IV. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

$E$  n'est plus forcément de dimension finie.

### IV.1. Projection orthogonale et supplémentaire orthogonale

#### IV. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

**Lemme IV.1.** Soit  $(u_1, \dots, u_k)$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$  et  $x \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ .

Le vecteur  $x - \sum_{i=1}^k \langle x, u_i \rangle \frac{u_i}{\|u_i\|^2}$  est orthogonal à  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ .

**Proposition IV.1.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthogonale de  $F$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \frac{e_i}{\|e_i\|^2}.$$

L'application  $p_F$  est une projection de  $E$ ,  $\text{Im}(p_F) = F$  et  $\text{ker}(p_F) = F^\perp$ .

En particulier,  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Définition IV.1.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ . On appelle **projection orthogonale sur  $F$** , notée  $p_F$ , la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

Le sous-espace  $F^\perp$  est appelé le **supplémentaire orthogonal de  $F$** .

**Proposition IV.2.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

$$\forall x, y \in E, \quad y = p_F(x) \iff (y \in F \text{ et } x - y \in F^\perp)$$

**Corollaire IV.3.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ ,

1.  $\forall x \in E, x - p_F(x) \in F^\perp$
2.  $\forall x \in E, \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$

**Proposition IV.4.** Supposons que  $E$  est euclidien et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

1.  $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$
2.  $(F^\perp)^\perp = F$ .

*Remarque IV.1.* Si  $F$  est un hyperplan de  $E$ , alors  $F^\perp$  est une droite. Donc il existe  $u \in E$  tel que  $F^\perp = \text{Vect}(u)$ . On dit que  $u$  est un **vecteur normal** à  $F$ , et on a alors  $F = \{x \in E \mid \langle x, u \rangle = 0\}$ .

**Proposition IV.5.** Supposons que  $E$  est euclidien et soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  de bases  $(f_1, \dots, f_n)$  et  $(g_1, \dots, g_p)$ . Alors  $G = F^\perp$  si et seulement si :

- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \langle f_i, g_j \rangle = 0$ .

#### IV.2. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

**Proposition IV.6 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).** Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille libre de  $E$ . Il existe une famille orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$$

**Méthode.** L'application du procédé de Gram-Schmidt est algorithmique : on note pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$  et

- on pose  $f_1 = u_1$
- si  $f_1, \dots, f_k$  sont construits, on prend  $f_{k+1} = u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1}) = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle u_{k+1}, f_i \rangle \frac{f_i}{\|f_i\|^2}$ .

À la fin, on pose pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$ .

**Corollaire IV.7.** Soit  $E$  un espace euclidien. Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale.

### IV.3. Distance à un sous-espace

#### **Théorème IV.8**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et soit  $x \in E$ .

L'ensemble  $\{\|x - f\|, f \in F\}$  est non vide et minoré.

On pose  $d(x, F) = \inf_{f \in F} (\|x - f\|)$  : c'est la **distance de  $x$  à  $F$** .

De plus,  $\|x - p_F(x)\| = d(x, F)$  et

$$\forall f \in F, \|x - f\| = d(x, F) \Rightarrow f = p_F(x).$$

**Corollaire IV.9.** Si  $E$  est de dimension finie et  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $d(x, F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$ .