

## Chapitre 30 : Déterminants

Dans tout le chapitre, on considère un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension  $n$ .

### I. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

#### I.1. Définition

##### **Théorème I.1 (Admis)**

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Il existe une unique application  $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  qui est :

- linéaire par rapport à chacune de ses variables, i.e. :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, x \in E \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ est linéaire}$$

- alternée, i.e. :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, (\exists (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \neq j \text{ et } x_i = x_j) \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .

**Proposition I.2.** Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une application qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée. Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

1. Si  $i \neq j$ , alors  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$ . On dit que  $f$  est **antisymétrique**.
2. Si un vecteur  $x_i$  est nul, alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .
3. Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée, alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Proposition I.3.** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  qui est linéaire par rapport à chacune de ses variables et alternée. Alors  $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ .

**Corollaire I.4.** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ .

**Proposition I.5.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  ssi  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

#### I.2. Interprétation géométrique en dimension 2 et 3

Supposons d'abord que  $n = 2$  et prenons  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  une base de  $E$ .

**Proposition I.6.** Soit  $x, y \in E$  dont les coordonnées respectives dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $(a, b)$  et  $(c, d)$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = ad - bc$ .

*Remarque I.1.*  $|\det_{\mathcal{B}}(x, y)|$  s'interprète comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $x$  et  $y$ , en prenant comme unité d'aire le parallélogramme construit sur  $e_1, e_2$ .

Prenons maintenant  $n = 3$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ .

**Proposition I.7.** Soit  $x, y, z$  trois vecteurs de  $E$  de coordonnées respectives dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(y_1, y_2, y_3)$  et  $(z_1, z_2, z_3)$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - z_1 y_2 x_3 - z_2 y_3 x_1 - z_3 y_1 x_2.$$

*Remarque I.2.*  $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)|$  mesure le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ , sachant que le volume unité est donné par celui engendré par  $\mathcal{B}$ .

## II. Déterminant d'un endomorphisme

**Proposition II.1.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$  deux bases de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ .

**Définition II.1.** Soit  $E$  de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Le **déterminant** de  $f$  est le scalaire  $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  pour n'importe quelle  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

**Corollaire II.2.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors pour tout  $x_1, \dots, x_n \in E$ ,  $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ .

*Remarque II.1.* Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\det_{\mathcal{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$  : le déterminant de  $f$  mesure de quel facteur  $f$  amplifie les volumes dans  $E$ .

**Proposition II.3.** Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

1.  $\det(\text{id}_E) = 1$ .
2.  $\det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f)$ .
3.  $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$ .
4.  $f$  est un automorphisme ssi  $\det(f) \neq 0$ . Dans ce cas,  $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ .

## III. Déterminant d'une matrice carrée

**Définition III.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . Pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$ , le **déterminant** de  $M$  est le scalaire  $\det(M) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$ .

**Proposition III.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  est

1. linéaire par rapport à chacune des colonnes :

$$\forall i \in [1, n], \forall C_1, \dots, C_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \det(C_1 | \dots | C_{i-1} | X | C_{i+1} | \dots | C_n) \end{cases} \text{ est linéaire.}$$

2.  $\det$  est **alternée** : si deux colonnes de  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont égales, alors  $\det(M) = 0$ .
3.  $\det(I_n) = 1$ .

De plus, si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $x_1, \dots, x_n \in E$  et  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  alors  $\det(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$  et  $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n))$ .

**Notation III.1.** Si  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note aussi :  $\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$ .

**Proposition III.2.** Pour  $n = 2$  : soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Alors  $\det(M) = ad - bc$ .

**Proposition III.3 (Admis).** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a  $\det(M^T) = \det(M)$ . Autrement dit, toutes les propriétés données sur les colonnes sont aussi vraies pour les lignes.

**Proposition III.4.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Soit  $N$  la matrice obtenue à partir de  $M$  en échangeant deux colonnes. Alors  $\det(N) = -\det(M)$ . On dit que  $\det$  est **antisymétrique**.
2. Si une colonne de  $M$  est nulle, alors  $\det(M) = 0$ .
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$ .
4.  $\det(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = d_1 \times \dots \times d_n$ .

## IV. Calculs de déterminants

### IV.1. Pivot de Gauss

**Proposition IV.1.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $C_1, \dots, C_n$  ses colonnes.

1. Si  $N$  est la matrice obtenue en faisant  $C_i \leftrightarrow C_j$ , alors  $\det(N) = -\det(M)$ .
2. Si  $N$  est la matrice obtenue en faisant  $C_j \leftarrow \lambda C_j$ , alors  $\det(N) = \lambda \det(M)$ .
3. Si  $N$  est la matrice obtenue en faisant  $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ , alors  $\det(N) = \det(M)$ .

Les énoncés analogues sur les lignes sont aussi vrais.

*Remarque IV.1.* On ne change donc pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

**Corollaire IV.2.** Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

### IV.2. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

**Définition IV.1.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ . Le **mineur** de position  $(i, j)$  de  $M$ , noté  $\Delta_{i,j}$  est le déterminant de la matrice  $(m_{kl})_{\substack{k \neq i \\ l \neq j}} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$  obtenue en enlevant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne de  $M$ .

**Proposition IV.3.** Soit  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

1. On peut développer le déterminant de  $M$  par rapport à la  $i$ -ième ligne :

$$\det(M) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} m_{i,k} \Delta_{i,k}.$$

2. On peut développer le déterminant de  $M$  par rapport à la  $j$ -ième colonne :

$$\det(M) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} m_{k,j} \Delta_{k,j}.$$

### IV.3. Déterminant et opérations

**Proposition IV.4.** 1. Soit  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire par rapport à chaque colonne et alternée. Alors  $\varphi = \varphi(I_n) \det$ .

2. Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

*Remarque IV.2.* Attention, en général,  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

**Corollaire IV.5.** 1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(M) \neq 0$$

De plus, si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$ .

2. Deux matrices semblables ont le même déterminant.