

## Déterminants - Exercices

**Exercice 1.** 1. Soit  $n$  un entier impair et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice antisymétrique. Montrer que  $\det(A) = 0$ .  
2. Le résultat précédent est-il encore vrai si  $n$  est pair?

**Exercice 2.** Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 19 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 3.** Calculer sous forme factorisée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

**Exercice 4.** 1. Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

2. En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 5.** Soit  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ . On note  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  ses colonnes. Calculer  $\det(C_1 + C_3, C_2 + C_4, C_1 - C_3, C_2 - C_4)$  en fonction de  $\det(M)$ .

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer les déterminants de taille  $n$  suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 7.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M = (\max(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $N = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $\det(M)$  et  $\det(N)$ .

**Exercice 8.** Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq b$ . Soit  $D = \begin{pmatrix} c & b & \cdots & b \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec  $n \geq 2$ . Soit  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice ne contenant que des 1. On pose  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \det(D + tU)$ .

1. Montrer que  $P$  est une fonction affine.
2. Calculer  $P(-a)$  et  $P(-b)$ .
3. Calculer  $\det(D)$ .
4. Calculer  $\det(D)$  lorsque  $a = b$ .

**Exercice 9.** Soit  $a, b, c$  trois réels et  $n$  un entier naturel non nul. On note

$$T_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et } \Delta_n = \det(T_{a,b,c}).$$

1. Déterminer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que :  $\forall n \geq 3, \Delta_n = \alpha \Delta_{n-1} - \beta \Delta_{n-2}$ .

2. On suppose que  $X^2 - \alpha X + \beta$  admet deux racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ . Déterminer l'expression de  $\Delta_n$  en fonction de  $r_1, r_2$  et  $n$ .

**Exercice 10.** Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et soit  $E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid y'' + ay' + by = 0\}$  qui est un sev de  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

On prend  $h \in \mathbb{R}$  et on considère l'application  $\varphi_h$  l'application qui à  $f \in E$  associe la fonction  $\varphi_h(f) : t \mapsto f(t+h)$ .

1. Montrer que  $\varphi_h$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Calculer  $\det(\varphi_h)$ .

**Exercice 11.** Soit  $u$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par  $u(P) = XP' + P(1)$ .

1. Montrer que  $u$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Calculer  $\det(u)$ .
3.  $u$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ ?

**Exercice 12.** Calculer le déterminant de l'endomorphisme  $u : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 13.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$ .
2. Déterminer les racines de  $\chi_A$ .
3. Pour chaque racine  $\lambda$  de  $\chi_A$  déterminer une base de  $E_\lambda = \ker(\lambda I_3 - A)$ .
4. Montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  est une matrice diagonale.

**Exercice 14.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le déterminant de Vandermonde de  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$  est défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. On suppose qu'il existe  $i \neq j$  tels que  $a_i = a_j$ . Que vaut  $V(a_1, \dots, a_n)$ ?
2. On suppose maintenant que  $a_1, \dots, a_n$  sont deux à deux distincts. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $P(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ .
  - (a) Justifier que  $P$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n-1$ .
  - (b) Déterminer le coefficient de degré  $n-1$  de  $P$ .
  - (c) En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$ .
  - (d) En déduire l'expression de  $V(a_1, \dots, a_n)$  en fonction de  $a_1, \dots, a_n$ .

**Exercice 15.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m_{i,j}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ )  $n^2$  variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  et telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P(m_{i,j} = 1) = P(m_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}.$$

On note  $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  la variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\delta_n = \det(M_n)$ . Calculer  $E(\delta_n)$ .

**Exercice 16.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 = I_n$ . Calculer  $\det(M)$  en fonction de  $\text{tr}(M)$ .  
On rappelle que pour toutes matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .