

Espaces préhilbertiens réels - Exercices

Exercice 1. Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires :

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) \end{cases}$
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \end{cases}$
3. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)dt \end{cases}$
4. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt \end{cases}$
5. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 (fg + f'g') \end{cases}$
6. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto X^T Y \end{cases}$
7. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (M, N) & \mapsto \text{tr}(M^T N) \end{cases}$
8. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto 2xx' + xy' + x'y + 2yy' \end{cases}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, \dots, a_n des réels tous distincts. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note L_i le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(L_i | P) = P(a_i)$.
3. Montrer que la famille (L_0, \dots, L_n) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$.
5. Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{i=0}^n P(a_i) = 0 \right\}$. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(0)g(0). \end{cases}$$

Montrer que c'est un produit scalaire sur E .

Exercice 4. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$.
Pour quels (x_1, \dots, x_n) a-t-on égalité?

Exercice 5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 6. Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 7. Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geq (b-a)^2$.
Étudier le cas d'égalité.

Exercice 8. On pose $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in E$, on définit $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n)Q(n)$.

1. Justifier que $(P|Q)$ est bien défini.
2. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Exercice 9. On prend $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$. Pour $u, v \in E$, on pose $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que $(u|v)$ existe.
2. Montrer que E est un ev.
3. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

Exercice 10. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est périodique de période } 2\pi\}$.

1. Vérifier que E est un sev de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \end{cases}$ est un produit scalaire sur E .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale.
4. E est-il de dimension finie?

Exercice 11. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \rightarrow \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt \end{cases}$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^4 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $A^T A X = 0_n \iff A X = 0_n$.
2. En déduire que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A)$.
3. Montrer alors que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien. Si $v \in E$, on note $\varphi_v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ la forme linéaire définie par $\varphi_v(x) = \langle v, x \rangle$.

1. Montrer que l'application $\Phi : v \in E \mapsto \varphi_v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.
2. Soit $H \subset E$. Montrer que H est un hyperplan de E ssi c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.
3. On prend $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. On pose $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$.

Justifier que H est un hyperplan de \mathbb{R}^n et donner un vecteur normal à H . Déterminer ensuite la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H .

Exercice 14. On considère \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F .
2. Écrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur F .
3. On prend $u = (1, 2, 3, 4)$. Calculer $d(u, F)$.

Exercice 15. \mathbb{R}^4 est muni de son produit scalaire usuel. On pose $u = (1, 1, 1, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 1)$ et $F = \text{Vect}(u, v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

Exercice 16. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx$.

Exercice 17. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $A, B \in E$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $A \in E$, $\text{tr}(A) \leq \sqrt{n \text{tr}(A^T A)}$. Quand a-t-on égalité?
3. Soit $H = \{M \in E \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Justifier que H est un sev de E et déterminer H^\perp .
4. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $A \in E$. Montrer que $\inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ([A]_{ij} - [S]_{ij})^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} ([A]_{ij} - [A]_{ji})^2$.

Indications - Solutions

Exercice 1 :

- Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Définie positive : Prenons $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $P^2(1) = 0$, $P^2(2) = 0$ et $P^2(3) = 0$, donc P a trois racines distinctes. Comme P est de degré au maximum 2, $P = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
- Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Définie positive : Prenons $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$ et $P''(0) = 0$: 0 est racine triple de P . Comme $\deg(P) \leq 2$, P est le polynôme nul.
- Symétrie, bilinéarité : Facile. Positivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme pour tout $t \in [-1, 1]$, $1 - t^2 \geq 0$, on a $P(t)^2(1 - t^2) \geq 0$, donc $\langle P, P \rangle \geq 0$. Définie positive : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\langle P, P \rangle = 0$, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t)^2(1 - t^2) = 0$, donc pour tout $t \in]-1, 1[$, $P(t) = 0$. P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.
- Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Définie positive : soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $t \mapsto t^2 f(t)^2$ est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle : c'est la fonction nulle. Donc pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t) = 0$. Par continuité, $f(0) = 0$.
- Symétrie, bilinéarité, positivité : Facile. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $t \mapsto f(t)^2 + f'(t)^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$ et d'intégrale nulle. C'est la fonction nulle. Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t)^2 + f'(t)^2 = 0$, donc $f(t) = 0$.
- Symétrie : soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, Y \rangle = X^T Y = (X^T Y)^T = Y^T X = \langle Y, X \rangle$. Bilinéarité : facile. Positivité : soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, X \rangle = X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$. Définie positive : soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\langle X, X \rangle = 0$, alors $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$, donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = 0$ car tous les termes sont positifs, et $X = 0$.
- Symétrie : soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle$. Bilinéarité : facile! Positivité : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(A^T A)_{ii} = \sum_{k=1}^n A_{ki}^2$. Donc $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki}^2 \geq 0$. Définie positive : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\langle A, A \rangle = \sum_{i,k} A_{ki}^2 = 0$. Alors pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A_{ik}^2 = 0$ car tous les termes de la somme sont positifs.
- Symétrie, bilinéarité : facile. Positivité : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 2(x + y/2)^2 + y^2/2 \geq 0$. Définie positive : si $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$, alors $y^2/2 = 0$ donc $y = 0$ et $(x + y/2)^2 = 0$, donc $x = 0$.

Exercice 2 :

- Symétrie : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i) = \sum_{i=0}^n Q(a_i)P(a_i) = (Q|P)$.
 - Bilinéarité : soit $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$(\lambda P + Q|R) = \sum_{i=0}^n (\lambda P + Q)(a_i)R(a_i) = \lambda \sum_{i=0}^n P(a_i)R(a_i) + \sum_{i=0}^n Q(a_i)R(a_i) = \lambda(P|R) + (Q|R)$$
 donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, donc par symétrie elle est bilinéaire.
 - Positivité : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|P) = \sum_{i=0}^n P(a_i)^2 \geq 0$ car tous les termes sont positifs.
 - Définie positive : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P|P) = 0 = \sum_{i=0}^n P(a_i)^2$. Or une somme de nombres positifs est nulle ssi tous les nombres sont nuls : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket P(a_i)^2 = 0$. Ainsi, P a $n + 1$ racines. Comme $\deg(P) \leq n$, $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On remarque déjà que si $j \neq i$, alors $L_i(a_j) = 0$ et $L_i(a_i) = 1$. Donc $(L_i|P) = \sum_{j=0}^n L_i(a_j)P(a_j) = P(a_i)$.
- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(L_i|L_i) = L_i(a_i) = 1$;
 - Soit $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, $(L_i|L_j) = L_j(a_i) = 0$.
 Donc (L_0, \dots, L_n) est une famille orthonormée. Son cardinal est égal à $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc c'est une base orthonormée.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n (P|L_i)L_i = \sum_{i=0}^n P(a_i)L_i$.
- Déjà, H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ car c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. On remarque de plus que $H = \text{Vect}(1)^\perp$. Puis, $\text{Vect}(1)$ a une BON formée du seul vecteur $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbb{R}_n[X]$. On calcule le projeté orthogonal de Q sur $\text{Vect}(1)$: $p(Q) = (Q, 1/\sqrt{n+1}) \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{i=0}^n \frac{Q(a_i)}{n+1}$. Puis, on calcule sa norme $\sqrt{(p(Q)|p(Q))} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{i=0}^n Q(a_i) \right|$.

Exercice 3 :

- Symétrie : soit $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'g' + f(0)g(0) = \int_0^1 g'f' + g(0)f(0) = \langle g, f \rangle$.
- Bilinéarité : soit $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle f + \lambda g, h \rangle = \int_0^1 (\lambda f + g)'h' + (\lambda f + g)(0)h(0) = \lambda \int_0^1 f'h' + \lambda f(0)h(0) + \int_0^1 g'h' + g(0)h(0) = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$$

donc on a la linéarité à gauche. Par symétrie, on a la bilinéarité.

- Positivité : soit $f \in E$, $\langle f, f \rangle = \int_0^1 (f')^2 + f(0)^2 \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
- Définie positivité : soit $f \in E$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 (f')^2 = 0$ car la somme de deux réels positifs est nulle ssi les deux sont nuls.
Or, la fonction $(f')^2$ est continue et positive sur $[0, 1]$. Comme son intégrale est nulle, pour tout $t \in [0, 1]$, $f'(t)^2 = 0$, donc $f'(t) = 0$: f est donc constante sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle.

Exercice 4 : On considère le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n : pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On applique

Cauchy-Schwarz à $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$: on a $\|y\| = \sqrt{n}$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \text{ donc en passant au carré } \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Exercice 5 : On reprend le produit scalaire de l'exercice précédent en prenant $x = (1, 2, \dots, n)$ et $y = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$: on a $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$, $\|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n k} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$, et $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n k\sqrt{k}$:

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)n(n+1)}{12}} = \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

Exercice 6 : On utilise le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^{n+1} et on applique Cauchy-Schwarz à $x = \left(\sqrt{\binom{n}{0}}, \sqrt{\binom{n}{1}}, \dots, \sqrt{\binom{n}{n}} \right)$ et $y = (1, 1, \dots, 1)$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{n+1} \sqrt{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} = \sqrt{n+1} 2^{n/2}.$$

Donc $u_n \leq \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{2}^n}{n^2(\sqrt{2})^n} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$. Par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge.

Exercice 7 : On utilise le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ défini sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (voir cours). On applique Cauchy-Schwarz à la fonction f et $\frac{1}{f}$ (qui est bien continue car f ne s'annule pas) : on a $\langle f, 1/f \rangle = \int_a^b 1 dt = (b-a)$, donc

$$(b-a)^2 \leq \|f\|^2 \|1/f\|^2 = \int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt.$$

Exercice 8 :

1. $P = a_d X^d + \dots + a_0$ et $Q = b_m X^m + \dots + b_0$ avec $a_d \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors $|2^{-n} P(n)Q(n)| \sim 2^{-n} |a_d b_m| n^{d+m}$. Mais par croissances comparées, $n^2 2^{-n} |a_d b_m| n^{d+m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $2^{-n} |a_d b_m| n^{d+m} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $2^{-n} |a_d b_m| n^{d+m}$ converge, donc la série $\sum 2^{-n} P(n)Q(n)$ converge absolument, donc converge.
2. La symétrie, la bilinéarité, la positivité sont immédiates. Puis, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors on a une série à termes positifs dont la somme est nulle, donc le terme général est nul. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)^2 = 0$. Le polynôme P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Exercice 9 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$. Par majoration, la série $\sum u_n v_n$ converge absolument donc converge. Ainsi, $(u|v)$ est bien défini.
2. La suite nulle est bien dans E . Prenons (u_n) et $(v_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(\lambda u_n + v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + v_n^2 + 2\lambda u_n v_n$ et les séries de termes généraux $\lambda^2 u_n^2$, v_n^2 et $2\lambda u_n v_n$ convergent. Donc $(\lambda u_n + v_n) \in E$.
3. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont immédiates. Puis, si $\sum u_n^2 = 0$, on a une série de termes positifs dont la somme est nulle, donc tous les termes sont nuls.

Exercice 10 :

1.
 - La fonction nulle est bien continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} .
 - Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est continue sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)(x + 2\pi) = \lambda f(x + 2\pi) + g(x + 2\pi) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$. Donc $\lambda f + g \in E$.
2.
 - Symétrie : ok.
 - Bilinéarité : ok.

- Positivité : ok.
 - Définie positivité : soit $f \in E$ telle que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors la fonction f^2 est continue, positive sur $[0, 2\pi]$ et d'intégrale nulle. Par positivité de l'intégrale, f^2 est nulle sur $[0, 2\pi]$. Comme f est 2π -périodique, elle est nulle partout.
3. Notons $g_k : x \mapsto \cos(kx)$. Soit $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $k \neq \ell$. On a $\cos(kx)\cos(\ell x) = \frac{1}{2}(\cos((k+\ell)x) + \cos((k-\ell)x))$, donc $\langle g_k, g_\ell \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)x) + \cos((k-\ell)x) dx = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{k+\ell} [\sin((k+\ell)x)]_0^{2\pi} + \frac{1}{k-\ell} [\sin((k-\ell)x)]_0^{2\pi} \right) = 0$, le calcul ayant un sens car $k \neq \ell$. Donc la famille est orthogonale.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc une famille libre de cardinal $n+1$ dans E . Donc E ne peut pas être de dimension finie!

Exercice 11 :

- Symétrie : ok.
 - Bilinéarité : ok.
 - Positivité : ok.
 - Définie positivité : soit $P \in E$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$. Par positivité de l'intégrale, $\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0$. Donc P a une infinité de racines : c'est le polynôme nul.
- Posons $P_0 = 1, P_1 = X$ et $P_2 = X^2$.

 - $\|P_0\| = \sqrt{2}$, donc $Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 - $\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^1 t dt = 0$ par imparité;
 - $\|P_1\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$, donc $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
 - $\langle P_0, P_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$ et $\langle P_1, P_2 \rangle = 0$, donc on pose $\tilde{Q}_2 = P_2 - \langle P_0, P_2 \rangle \frac{P_0}{\|P_0\|^2} = X^2 - \frac{1}{3}$;
 - $\|\tilde{Q}_2\|^2 = \int_{-1}^1 (t^2 - 1/3)^2 dt = \int_{-1}^1 t^4 dt - \frac{2}{3} \int_{-1}^1 t^2 dt + \frac{1}{9} \int_{-1}^1 dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$, donc $Q_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^2 - \frac{1}{3})$.
- Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X] : p(X^4) = \langle X^4, Q_0 \rangle Q_0 + \langle X^4, Q_1 \rangle Q_1 + \langle X^4, Q_2 \rangle Q_2$. Or, par parité, $\langle X^4, Q_1 \rangle = 0$. Puis,

$$\langle X^4, Q_0 \rangle = \frac{2}{5\sqrt{2}} \text{ et } \langle X^4, Q_2 \rangle = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{15} \right) = \frac{8\sqrt{5}}{35\sqrt{2}}.$$

D'où, $p(X^4) = \frac{1}{5} + \frac{6}{7}(X^2 - 1/3) = \frac{6}{7}X^2 - \frac{3}{35}$.

Exercice 12 :

- Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Si $AX = 0_n$, alors $A^T AX = A^T 0_n = 0_n$. Réciproquement, si $A^T AX = 0_n$, alors $X^T A^T AX = 0_n$. Or $X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = \langle AX, AX \rangle$ pour le produit scalaire usuel. Donc $AX = 0_n$ par définie positivité.
- On a $\dim(\ker(A^T A)) = \dim(\ker(A))$ d'après la question précédente. Donc d'après le théorème du rang, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A)$.
- Déjà, $\text{rg}(A^T A) \leq \text{rg}(A^T)$ d'après les propriétés du rang. Donc $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A^T)$. Or, en appliquant cette inégalité à la matrice A^T , on trouve $\text{rg}(A^T) \leq \text{rg}((A^T)^T) = \text{rg}(A)$. D'où l'égalité.

Exercice 13 :

- Linéarité : soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in E$:

$$\Phi(\lambda u + v)(x) = \langle \lambda u + v, x \rangle = \lambda \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle = \lambda \Phi(u)(x) + \Phi(v).$$

- Injectivité : soit $v \in \ker(\Phi)$. Alors pour tout $x \in E, \Phi(v)(x) = 0$, donc $\langle v, x \rangle = 0$. En particulier, $\langle v, v \rangle = 0$. Par définie positivité du produit scalaire, $v = 0_E$.
 - Comme $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \dim(\mathbb{R}) = \dim(E)$, Φ est automatiquement un isomorphisme.
- Soit $v \in E$ non nul. Supposons que $H = v^\perp$. Alors, φ_v est une forme linéaire non nulle, donc $\ker(\varphi_v)$ est un hyperplan. Or, $\ker(\varphi_v) = \{x \in E \mid \langle v, x \rangle = 0\} = v^\perp = H$.
Supposons que H est un hyperplan. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ telle que $H = \ker(\varphi)$. D'après la question précédente, il existe $v \in E$ tel que $\varphi = \Phi(v)$. Donc $H = \ker(\varphi_v) = v^\perp$.
 - Soit $v = (a_1, \dots, a_n)$. Alors $H = v^\perp$. Donc H est un hyperplan et v est normal à H .
Notons p la projection orthogonale sur H^\perp . Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_i, v \rangle = a_i$, donc $p(e_i) = a_i \frac{v}{\|v\|^2} = \frac{a_i}{\sum a_i^2} v$. La matrice cherchée est

$$\text{donc : } I_n - \frac{1}{\sum a_i^2} \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_3 a_1 & \dots & a_n a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 & \dots & a_n a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 & \dots & a_n a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_n & a_2 a_n & a_3 a_n & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 :

1. Déjà, $F = \text{Vect}((0, 1, 0, -1), (1, 0, -1, 0))$, donc $\dim(F) = 2$. Son orthogonal est de dimension 2 aussi. Puis, on remarque que $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, 1, -1)$ sont dans F^\perp (voir exercice 13). On orthonormalise :

- $\|u\| = 2$, donc on pose $e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$;
- $\langle u, v \rangle = 0$;
- $\|v\| = 2$, donc on pose $e_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)$.

2. On peut commencer par la matrice de $p_{F^\perp} : p_{F^\perp}(1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = (1, 0, 1, 0)$, etc... donc $\text{Mat}_{\text{can}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis, $\text{Mat}_{\text{can}}(p_F) = I_4 - \text{Mat}_{\text{can}}(p_{F^\perp})$.

3. $d(u, F) = \|p_{F^\perp}(u)\| = \|5e_1 - e_2\| = \|(2, 3, 2, 3)\| = \sqrt{26}$.

Exercice 15 : On orthonormalise (u, v) :

- $\|u\| = \sqrt{3}$, donc $f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1, 0)$;
- $\tilde{f}_2 = v - \langle v, u \rangle \frac{u}{\|u\|^2} = (1, 1, 0, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1, 0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$;
- $\|\tilde{f}_2\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 1} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, donc $f_2 = (\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}})$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique et p la projection orthogonale sur F :

- $p(e_1) = \langle e_1, f_1 \rangle f_1 + \langle e_1, f_2 \rangle f_2 = \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0) + \frac{1}{15}(1, 1, -2, 3) = (2/5, 2/5, 1/5, 1/5)$
- $p(e_2) = (2/5, 2/5, 1/5, 1/5)$
- $p(e_3) = \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0) - \frac{2}{15}(1, 1, -2, 3) = (1/5, 1/5, 3/5, -2/5)$
- $p(e_4) = \frac{3}{15}(1, 1, -2, 3)$.

On en déduit la matrice!

Exercice 16 : On prend le produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ sur $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On veut projeter $f : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}_1[x]$. On orthonormalise : $e_1 : x \mapsto 1$ et $e_2 : x \mapsto x$. On obtient $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$. Puis on projette : $p(f)(x) = \langle f, f_1 \rangle f_1(x) + \langle f, f_2 \rangle f_2(x) = e^1 - 1 + \sqrt{3}(3 - e^1)(2\sqrt{3}x - \sqrt{3}) = -10 + 4e^1 + 6(3 - e^1)x$. Il ne reste plus qu'à calculer $\|f - p(f)\|^2 = \int_0^1 (e^x + 10 - 4e^1 - 6(3 - e^1)x)^2 dx = -\frac{7}{2}e^2 + 20e^1 - \frac{57}{2}$.

Exercice 17 :

- Symétrie : soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(B^\top A) = \langle B, A \rangle$.
 - Bilinéarité : facile!
 - Positivité : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(A^\top A)_{ii} = \sum_{k=1}^n A_{ki}^2$. Donc $\text{tr}(A^\top A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki}^2 \geq 0$.
 - Définie positivité : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\langle A, A \rangle = \sum_{i,k} A_{ki}^2 = 0$. Alors pour tout $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $A_{ik}^2 = 0$ car tous les termes de la somme sont positifs.
- On applique Cauchy-Schwarz A et $I_n : \langle A, I_n \rangle = \text{tr}(A)$, $\|I_n\| = \sqrt{n}$, donc $\text{tr}(A) \leq \sqrt{n} \sqrt{\text{tr}(A^\top A)}$. On a égalité ssi A et I_n sont colinéaires, c'est-à-dire ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \lambda I_n$.
- L'application tr est une forme linéaire non nulle, donc $H = \ker(\text{tr})$ est un hyperplan de E . H^\top est de dimension 1, or $\forall M \in H$, $\langle M, I_n \rangle = \text{tr}(M) = 0$, donc $I_n \in H^\top$. Donc $H^\top = \text{Vect}(I_n)$.
- Ce sont bien des sev de E . Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) : \langle M, N \rangle = \text{tr}(M^\top N) = \text{tr}(MN) = \langle N, M \rangle = -\text{tr}(NM) = -\text{tr}(MN)$, donc $\langle M, N \rangle = 0$. Ainsi, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\top$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\top$. Notons $s = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ et $a = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$. On sait (!) que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires, donc $a + s = n^2$. Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
- On a $M = \frac{M + M^\top}{2} + \frac{M - M^\top}{2}$, donc le projeté est $\frac{M + M^\top}{2}$.
- On remarque que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_{ij} - S_{ij})^2 = \|A - S\|^2$. La borne inférieure est atteinte pour $S = \frac{A + A^\top}{2}$: on a $A - \frac{A + A^\top}{2} = \frac{A - A^\top}{2}$, la valeur cherchée est $\frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_{ij}^2 - A_{ji}^2)$.