Fonctions de deux variables - Exercices

Exercice 1. Représenter graphiquement les parties du plan suivantes :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq x\}$;
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } y + x - 3 \geq 0\}$;
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$;
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$;
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } 3y + x - 12 \leq 0 \text{ et } 3x + y - 12 \leq 0\}$;
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 1 \text{ et } x - y < 1\}$;

Lesquelles sont des ouverts ? Pourquoi ?

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à préciser et calculer leurs dérivées partielles :

1. $f_1(x, y) = x^2 + y^2$
2. $f_2(x, y) = \arctan(2x + y)$
3. $f_3(x, y) = \cos(xy)$
4. $f_4(x, y) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$
5. $f_5(x, y) = \sqrt{2y - x}$
6. $f_6(x, y) = \ln(x + y)$

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées partielles :

1. $f(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$
2. $g(x, y) = \varphi(xy)$
3. $h(x, y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. Pour chaque fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$, déterminer l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point A :

1. $f(x, y) = \cos(x - y)$ et $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0, f\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)\right)$;
2. $f(x, y) = x^2 - y^2$ et $A(0, 0, 0)$;
3. $f(x, y) = x\left(\ln(x)^2 + y^2\right)$ et $A\left(\mathrm{e}^{-1}, 1, 2\,\mathrm{e}^{-1}\right)$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Justifier que $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(0, t) + f(t, t^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Justifier que $h_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y, x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
3. Même question pour $h_2 : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u + v, 2v)$.
4. Même question pour $h_3 : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(uv, u^2 + v^2)$.

Exercice 7. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. La fonction f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?
3. La fonction f admet-elle un extremum global en $(0, 0)$?
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum global en $(1, 1)$.
5. (a) Soit $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ avec $|h| \leq 1$ et $|k| \leq 1$. Montrer que $f(1 + h, 1 + k) - f(1, 1) \geq 2h^2 - 3hk + 2k^2$.
   (b) En déduire que f admet un extremum local en $(1, 1)$.

Exercice 8. Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
2. $f_2(x, y) = x^3 + y^3$
3. $f_3(x, y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$
4. $f_4(x, y) = x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$.

Exercice 9. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

On considère une solution f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Soit $u : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[\mapsto r\cos(\theta)$ et $v : (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[\mapsto r\sin(\theta)$ et $g(r,\theta) = f(u(r,\theta), v(r,\theta))$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$ et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. En déduire que g vérifie : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[, \ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'EDP de départ.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}^*$ si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et homogène de degré α. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto f(tx, ty)$. En calculant la dérivée de g de deux façons différentes, montrer que :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y). \tag{*}$$

2. Réciproquement, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que si f vérifie l'EDP (*), alors f est homogène de degré α.
3. Montrer que les seules fonctions homogènes de degré 1 sont de la forme $(x,y) \mapsto ax + by$.