

Devoir Surveillé 7

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.

Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Huit questions indépendantes).

1. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}^* .
 - (a) Rappeler la définition de f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
 - (b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
 - (c) Prouver que f est prolongeable par continuité en 0.
 - (d) Montrer que f est dérivable en 0.
 - (e) Justifier enfin que f' n'est pas continue en 0.
2. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
3. Poser la division euclidienne de $A = X^4 + X^3 - X + 5$ par $B = X^2 + 1$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
 - (a) Montrer que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.
 - (b) Prouver que α est racine de P ssi $\bar{\alpha}$ est racine de P .
5. Déterminer toutes les racines de $P = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 14X^2 - 15X + 5$ en commençant par chercher une racine évidente et sa multiplicité.
6. (a) Décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X-1)(X+2)(X+3)}$.
 (b) Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$ sur $] -2, 1[$.
7. Énoncer la formule de Taylor-Young.
8. Donner les développements limités suivants :

(a) $DL_n(0)$ de $x \mapsto e^x$	(e) $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \text{ch}(x)$	(h) $DL_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha$
(b) $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \sin(x)$	(f) $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$	(i) $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$
(c) $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos(x)$	(g) $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$	(j) $DL_5(0)$ de $\tan(x)$.
(d) $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \text{sh}(x)$		

Exercice 2 (Une droite).

Soient A et B deux points de \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives $(3, 4)$ et $(7, 15)$. On note D la droite (AB) . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

1. Déterminer une équation de la droite D .
2. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X - 3$ est 4 et le reste de la division euclidienne de P par $X - 7$ est 15.
Déterminer le reste R de la division euclidienne de P par $(X - 3)(X - 7)$.
3. Quelle est la courbe représentative de R par rapport à celle de P ?

Exercice 3 (Des DL).

1. (a) Donner le développement limité de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 en 0.
- (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{1+e^{2x}}}$.
2. Soit $h : x \mapsto \frac{\cos(x) - e^x}{\sin(x)}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition de h .
 - (b) Calculer le développement limité de h en 0 à l'ordre 2.
On développera le numérateur et le dénominateur à l'ordre 3.
 - (c) Justifier que h est prolongeable par continuité en 0 et que le graphe de h admet une tangente en 0 dont on précisera l'équation et la position relative par rapport au graphe au voisinage de 0.

Exercice 4 (Une fonction, une suite).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{4}$.

1. (a) Étudier la convexité de la fonction \sin sur $[0, \pi]$.
- (b) En déduire que : $\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \leq x$.
- (c) Justifier que : $\forall x \in]0, \pi], f(x) < x$.
- (d) En déduire que f admet un unique point fixe α dans $[0, \pi]$ et préciser la valeur de α .
2. Montrer que la fonction f est $\frac{3}{4}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$. *On pourra utiliser la question 1c.*
 - (b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.
 - (c) En déduire la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

Exercice 5 (Polynômes de Legendre).

1. **Questions de cours :**

- (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{N}$. Donner sans démonstration le degré de $P^{(m)}$ en fonction de m et de $\deg(P)$.
- (b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et α une racine de P .
 - i. Rappeler la définition de la multiplicité m_α de α .
 - ii. Donner la caractérisation de la multiplicité à l'aide des dérivées successives de P .
 - iii. On suppose que $m_\alpha > 1$. Montrer que α est racine de multiplicité $m_\alpha - 1$ de P' .
- (c) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.
 - i. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, ((X - a)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} (X - a)^{n-k}$.
 - ii. Pour tout $k \geq n + 1$, que vaut $((X - a)^n)^{(k)}$?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2 - 1)^n = ((X - 1)(X + 1))^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés polynômes de Legendre. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n .

2. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

3. Soit n un entier naturel. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n .

On pourra utiliser les questions 1a et 1c.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de U_n en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ , que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U'_n = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

On pourra utiliser la question 1b et le théorème de Rolle.

5. Soit $n \geq 2$ un entier et soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1) \cdots (X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $] -1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1) \cdots (X-\beta_{k+1}).$$

6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note x_1, \dots, x_n .
7. Écrire la forme factorisée de L_n .

Correction du Devoir Surveillé 7

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* si f est dérivable sur \mathbb{R}^* et f' est continue sur \mathbb{R}^* .
- (b) f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* par opérations.
- (c) Pour tout $x \neq 0$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par encadrement.
Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- (d) Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par encadrement.
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- (e) Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$.
Donc f' n'a pas de limite en 0.

2. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

3. On trouve $A = (X^2 + X - 1)B - 2X + 6$.

4. (a) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k : \overline{P(\alpha)} = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k}$, donc $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$.

(b) α est racine de $P \iff P(\alpha) = 0 \iff \overline{P(\alpha)} = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$, donc α est racine de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de P .

5. On remarque que $P(1) = 0$. Puis $P' = 5X^4 - 12X^3 - 6X^2 + 28X - 15$, donc $P'(1) = 0$. Puis, $P'' = 20X^3 - 36X^2 - 12X + 28$, donc $P''(1) = 0$. Puis $P''' = 60X^2 - 72X - 12$ et $P'''(1) \neq 0$. Donc 1 est racine de P de multiplicité 3.
On pose la division euclidienne de P par $(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et on obtient $P = (X - 1)^3(X^2 - 5) = (X - 1)^3(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$.

Les racines de P sont donc 1 de multiplicité 3 et $\pm\sqrt{5}$ qui sont simples.

6. (a) D'après le cours, il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(X - 1)(X + 2)(X + 3)} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{X + 2} + \frac{\gamma}{X + 3}.$$

- On multiplie par $X - 1$ et on évalue en 1 : $\frac{1}{12} = \alpha$.
- On multiplie par $X + 2$ et on évalue en -2 : $-\frac{1}{3} = \beta$.
- On multiplie par $X + 3$ et on évalue en -3 : $\frac{1}{4} = \gamma$.

Donc
$$\frac{1}{(X - 1)(X + 2)(X + 3)} = \frac{\frac{1}{12}}{X - 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{X + 2} + \frac{\frac{1}{4}}{X + 3}.$$

(b) Une primitive de f sur $] -2, 1[$ est $x \mapsto \frac{1}{12} \ln(1 - x) - \frac{1}{3} \ln(x + 2) + \frac{1}{4} \ln(x + 3)$.

7. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

- | | |
|--|---|
| <p>8. (a) $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$</p> <p>(b) $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$</p> <p>(c) $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$</p> | <p>(d) $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k + 1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$</p> <p>(e) $\text{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$</p> <p>(f) $\frac{1}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$</p> |
|--|---|

<p>(g) $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$</p> <p>(h) $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$</p>	<p>(i) $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$</p> <p>(j) $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$</p>
--	--

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de D vaut $\frac{11}{4}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{11}{4}x + b$ est une équation de D . Comme $A \in D$, $4 = \frac{33}{4} + b$ donc $b = -\frac{17}{4}$. Ainsi, une équation de D est $y = \frac{11}{4}x - \frac{17}{4}$.
2. On a $\deg(R) < 2$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$. De plus, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = (X-3)(X-7)Q + aX + b$.
On évalue en 3 et en 7 : $P(3) = 3a + b$ et $P(7) = 7a + b$.
Or il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = (X-3)Q_1 + 4$ et $P = (X-7)Q_2 + 15$. En évaluant de nouveau : $P(3) = 4$ et $P(7) = 15$.
Ainsi, $3a + b = 4$ et $7a + b = 15$. En soustrayant, $4a = 11$, donc $a = \frac{11}{4}$ et $b = -\frac{17}{4}$. Le reste est donc $R = \frac{11}{4}X - \frac{17}{4}$.
3. C'est la droite D qui est la sécante à la courbe représentative de P aux points d'abscisses 3 et 7.

Correction de l'exercice 3 :

1. (a) On applique la formule $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$. On a donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

- (b) On veut composer, mais attention, $e^{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1!$ On commence donc par réécrire :

$$\sqrt{\frac{2}{1+e^{2x}}} = \sqrt{\frac{2}{2+e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{e^{2x}-1}{2}}}$$

Cette fois $u = \frac{e^{2x}-1}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2) \right) = x + x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o(x^2).$$

Or $u^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2)$, d'où

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

2. (a) On a $\sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid x = k\pi$. Donc l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- (b) On utilise les DL à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) &= x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ \cos(x) - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) &= x \left(-1 - x - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x(-1-x-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}{x(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}$$

On pose $u = \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ de sorte que

$$\begin{aligned} h(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-1 - x - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \frac{1}{1-u} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-1 - x - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) (1 + u + o(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-1 - x - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right). \end{aligned}$$

D'où

$$h(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - x - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

- (c) D'après le DL obtenu précédemment, h admet une limite en 0 qui vaut -1 . Donc h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$.
Comme h a un DL à l'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0 et $h'(0) = -1$. Sa tangente a pour équation $y = -1 - x$ et la courbe est en-dessous de la tangente au voisinage de 0.

Correction de l'exercice 4 :

1. (a) La fonction \sin est deux fois dérivable et sa dérivée seconde vaut $-\sin$ qui est une fonction négative sur $[0, \pi]$. Donc \sin est concave sur $[0, \pi]$.
- (b) La courbe de \sin est au-dessous de sa tangente en 0 : $\forall x \in [0, \pi], \sin(x) \leq x$.
- (c) Soit $x \in]0, \pi[$. D'après la question précédente : $f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{4} \leq \frac{3}{4}x < x$ car $x \neq 0$.
- (d) Déjà 0 est un point fixe de f : $f(0) = 0$.
Puis, d'après la question précédente, $\forall x \in]0, \pi[, f(x) \neq x$.
Donc f admet un seul point fixe sur $[0, \pi]$, c'est $\alpha = 0$.

2. Pour tout $x \in [0, 1], |f'(x)| = \frac{2 + \cos(x)}{4} \leq \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$. D'après l'IAF, f est donc $\frac{3}{4}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3. (a) On procède par récurrence :
 - Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \in [0, 1]$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \in [0, 1]$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) < u_n \leq 1$ et $f(u_n) \geq 0$. Donc $u_{n+1} \in [0, 1]$.

On conclut par récurrence.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est $\frac{3}{4}$ -lipschitzienne sur $[0, 1]$:

$$\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|.$$

On applique cette inégalité pour $x = u_n$ et $y = \alpha$ et on trouve :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|.$$

- (c) Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Or, comme $\frac{3}{4} \in [0, 1[$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Par encadrement, (u_n) tend vers $\alpha = 0$.

Correction de l'exercice 5 :

1. (a) On a

$$\deg(P^{(m)}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } m > \deg(P) \\ \deg(P) - m & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) i. La multiplicité est le plus grand entier naturel m_α tel que $(X - \alpha)^{m_\alpha} | P$.
- ii. On a $m_\alpha = \min \{k \in \mathbb{N} \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0\}$.

- iii. D'après la question précédente, on a $\forall k \in \llbracket 0, m_\alpha - 1 \rrbracket, P^{(k)} = 0$ et $P^{(m_\alpha)}(\alpha) \neq 0$.
 Donc, $\forall k \in \llbracket 0, m_\alpha - 2 \rrbracket, (P')^{(k)}(\alpha) = 0$ et $(P')^{(m_\alpha - 1)}(\alpha) \neq 0$. D'après la caractérisation de la multiplicité avec les dérivées, α est une racine de multiplicité $m_\alpha - 1$ de P' .

(c) i. On procède par récurrence sur k :

- Initialisation : pour $k = 0$, on a bien $((X - a)^n)^{(k)} = (X - a)^n = \frac{n!}{(n-0)!} (X - a)^n$.
- Hérité : soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et supposons que $((X - a)^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} (X - a)^{n-k}$.
 Alors $((X - a)^n)^{(k+1)} = \left(\frac{n!}{(n-k)!} (X - a)^{n-k} \right)' = \frac{n!}{(n-k)!} (n-k)(X - a)^{n-k-1}$ par HR.
 D'où $((X - a)^n)^{(k+1)} = \frac{n!}{(n-k-1)!} (X - a)^{n-(k+1)}$.

On conclut par récurrence.

ii. Si $k \geq n + 1$, alors $((X - a)^n)^{(k)} = 0$ d'après la question 1a.

2. • $U_0 = 1$, et $L_0 = \frac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = U_0$, donc $L_0 = 1$.
- $U_1 = X^2 - 1$ et $L_1 = \frac{1}{2^1 1!} U_1' = \frac{1}{2} 2X$, donc $L_1 = X$.
- $U_2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \frac{1}{2^2 2!} U_2'' = \frac{1}{8} (12X^2 - 4)$, donc $L_2 = \frac{1}{2} (3X^2 - 1)$.

3. D'après la question 1a, $\deg(L_n) = \deg(U_n) - n = 2n - n = n$.

Le terme dominant de $U_n^{(n)}$ est obtenu à partir du terme dominant de U_n en le dérivant n fois. Or le terme dominant de U_n est X^{2n} en développant à l'aide de Newton.

Donc le terme dominant de $U_n^{(n)}$ est $\frac{(2n)!}{n!} X^n$ d'après la question 1c.

Ainsi, $a_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

4. On a $U_n = (X - 1)^n (X + 1)^n$, donc les racines de U_n sont 1 et -1 qui ont toutes les deux multiplicité n .

D'après la question 1b, 1 et -1 sont des racines de multiplicité $n - 1$ de U_n' . De plus, la fonction $x \mapsto U_n(x)$ est continue sur $]-1, 1[$, dérivable sur $] -1, 1[$ et $U_n(1) = U_n(-1)$, donc d'après Rolle, il existe $\alpha \in] -1, 1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$.

Or U_n' est de degré $2n - 1$ donc ses seules racines sont 1, -1 et α . Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U_n' = \lambda(X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} (X - \alpha)$.

On aurait pu aussi calculer $U_n' = ((X - 1)^n (X + 1)^n)' = n(X - 1)^{n-1} (X + 1)^n + n(X - 1)^n (X + 1)^{n-1} = n(X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} (X + 1 + X - 1) = 2n(X - 1)^{n-1} (X + 1)^{n-1} X$.

5. On peut supposer que $-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k < 1$ quitte à les réordonner. La fonction $x \mapsto U_n^{(k)}(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} , et $U_n^{(k)}(\alpha_1) = U_n^{(k)}(\alpha_2) = \dots = U_n^{(k)}(\alpha_k) = 0$. De plus, $U_n^{(k)}(1) = U_n^{(k)}(-1) = 0$ car $n - k > 0$. Donc en appliquant Rolle sur les intervalles $] -1, \alpha_1[$, $]\alpha_1, \alpha_2[$, $]\alpha_2, \alpha_3[$, ..., $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ et $]\alpha_k, 1[$, il existe $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ tels que

$$-1 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \dots < \beta_k < \alpha_k < \beta_{k+1} < 1 \text{ et } U_n^{(k+1)}(\beta_1) = \dots = U_n^{(k+1)}(\beta_{k+1}) = 0.$$

En utilisant la question 1b, 1 et -1 sont racines de multiplicité $n - k - 1$ de $U_n^{(k+1)}$. Ainsi, comme $\deg(U_n^{(k+1)}) = 2n - (k + 1) = n - k - 1 + n - k - 1 + k + 1$, on a toutes les racines de $U_n^{(k+1)}$. Il existe donc $v \in \mathbb{R}$ tel que

$$U_n^{(k+1)} = v(X - 1)^{n-k-1} (X + 1)^{n-k-1} (X - \beta_1) \dots (X - \beta_{k+1}).$$

6. Avec les deux questions précédentes, on a montré par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket, U_n^{(k)}$ admet k racines simples dans $] -1, 1[$.

En particulier, pour $k = n, U_n^{(n)}$ admet n racines simples dans $] -1, 1[$. Comme $L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$, L_n admet n racines réelles simples dans $] -1, 1[$. Or, L_n est de degré n , donc n'admet pas d'autre racine sur \mathbb{R} .

En conclusion, L_n admet n racines simples qui sont toutes réelles et dans $[-1, 1]$.

7. $L_n = a_n \prod_{k=1}^n (X - x_k) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \prod_{k=1}^n (X - x_k)$.