

Devoir Surveillé de Cours 7

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Vingt-huit questions indépendantes).

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Rappeler la définition de f est dérivable en a .
2. Énoncer le théorème de Rolle.
3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Rappeler la définition de f est lipschitzienne sur I .
4. Énoncer l'inégalité des accroissements finis.
5. Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
6. Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}^* .
 - (a) Rappeler la définition de f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
 - (b) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .
 - (c) Prouver que f est prolongeable par continuité en 0.
 - (d) Montrer que f est dérivable en 0.
 - (e) Justifier enfin que f' n'est pas continue en 0.
7. Soit $f : x \mapsto \frac{e^{3x}}{1+x}$. Prouver que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ puis calculer sa dérivée n -ième pour $n \in \mathbb{N}$.
8. (a) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Rappeler la définition de f est convexe sur I .
(b) Prouver que :
 - i. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
 - ii. $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.
9. Énoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
10. Poser la division euclidienne de $A = X^4 + X^3 - X + 5$ par $B = X^2 + 1$.
11. Rappeler les formules pour le degré d'une somme, d'un produit et d'une composée de deux polynômes.
12. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $m \in \llbracket 0, \deg(P) \rrbracket$. Montrer que $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$.
13. (a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P . Rappeler la définition de la multiplicité de α .
(b) Énoncer la caractérisation de la multiplicité d'une racine avec les dérivées.
14. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Calculer $((X - \alpha)^n)^{(p)}$.
15. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.
16. Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant le coefficient du monôme de degré $2n$ de $P = (X^2 - 1)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}.$$
17. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
 - (a) Montrer que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.
 - (b) Prouver que α est racine de P ssi $\bar{\alpha}$ est racine de P .
18. Résoudre l'équation $Q(X) = Q(X + 1)$ d'inconnue $Q \in \mathbb{C}[X]$ par analyse-synthèse.
19. Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes deux à deux distincts.
 - (a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
 - (b) Soient $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = b_j$.
20. (a) Rappeler la définition de polynôme scindé sur \mathbb{K} .
(b) Donner les relations coefficients racines pour un polynôme scindé sur \mathbb{K} .
(c) Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
(d) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$?
(e) Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
21. Factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

22. Déterminer toutes les racines de $P = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 14X^2 - 15X + 5$ en commençant par chercher une racine évidente et sa multiplicité.
23. Soit $P = (X - 2)(X - 1)(X + 1)(X + 2)$. Montrer que P' a trois racines distinctes qui sont toutes réelles.
24. (a) Décomposer en éléments simples $\frac{1}{(X - 1)(X + 2)(X + 3)}$.
- (b) Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}$ sur $] -2, 1[$.
25. Énoncer la formule de Taylor-Young.
26. Donner les développements limités suivants :
- | | | |
|---|--|--|
| (a) $DL_n(0)$ de $x \mapsto e^x$ | (d) $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \text{sh}(x)$ | (g) $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1 - x)$ |
| (b) $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \sin(x)$ | (e) $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \text{ch}(x)$ | (h) $DL_n(0)$ de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ |
| (c) $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos(x)$ | (f) $DL_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1 - x}$ | (i) $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$. |
27. Déterminer le $DL_5(0)$ de \tan :
- (a) à partir de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$
- (b) en primitivant $\frac{1}{\cos^2}$.
28. Déterminer les développements limités suivants :
- (a) $DL_4(0)$ de $x \cos(x) - e^x$
- (b) $DL_4(0)$ de $x e^x \ln(1 + x)$
- (c) $DL_3(0)$ de $\sqrt{1 + \sin(x)}$
- (d) $DL_3(1)$ de $\sqrt{1 + x}$

Exercice 2 (Une droite).

Soient A et B deux points de \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives $(3, 4)$ et $(7, 15)$. On note D la droite (AB) . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

1. Déterminer une équation de la droite D .
2. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X - 3$ est 4 et le reste de la division euclidienne de P par $X - 7$ est 15.
Déterminer le reste R de la division euclidienne de P par $(X - 3)(X - 7)$.
3. Quelle est la courbe représentative de R par rapport à celle de P ?

Correction du Devoir Surveillé de Cours 7

Correction de l'exercice 1 :

1. f est dérivable en a ssi le taux $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a .
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. f est lipschitzienne sur I ssi il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.
4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$. Alors, $\forall x \neq y \in [a, b], m \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq M$.
5. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.
6. (a) f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* si f est dérivable sur \mathbb{R}^* et f' est continue sur \mathbb{R}^* .
 (b) f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* par opérations.
 (c) Pour tout $x \neq 0, -x^2 \leq f(x) \leq x^2$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par encadrement.
 Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
 (d) Pour tout $x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Or $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$, donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par encadrement.
 Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
 (e) Pour $x \neq 0, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$.
 Donc f' n'a pas de limite en 0.
7.
 - Soit $g : x \mapsto e^{3x}$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et on montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 3^k e^{3x}$.
 - Soit $h : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. La fonction h est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
 ▷ Initialisation : pour $k = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(0)}(x) = \frac{1}{1+x}$ et $\frac{(-1)^0 0!}{(1+x)^{0+1}} = \frac{1}{1+x}$.
 ▷ Hérité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = (-1)^k k! (1+x)^{-(k+1)}$. En dérivant, $h^{(k+1)}(x) = (h^{(k)})'(x) = -(k+1)(-1)^k k! (1+x)^{-(k+1)-1} = (-1)^{k+1} (k+1)! (1+x)^{-(k+2)}$.
 On conclut avec le principe de récurrence.
 - f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par opérations. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 D'après la formule de Leibniz, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k e^{3x} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{(1+x)^{n-k+1}} = n! e^{3x} \sum_{k=0}^n \frac{3^k (-1)^{n-k}}{k! (1+x)^{n-k+1}}$.
8. (a) f est convexe sur I si : $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
 (b) i. Soit $f : x \mapsto e^x$. f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^x \geq 0$. Donc f est convexe sur \mathbb{R} . De plus, la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = x + 1$. Comme f est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x + 1$.
 ii. Soit $f : x \mapsto \ln(x)$. f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$. Donc f est concave sur $]0, +\infty[$. De plus, la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1) \iff y = x - 1$. Comme f est concave, sa courbe est en-dessous de ses tangentes : $\forall x > 0, f(x) \leq x - 1$.
9. Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
10. On trouve $A = (X^2 + X - 1)B - 2X + 6$.
11. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non nuls : $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)), \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q), \deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.
12. On procède par récurrence sur m :
 - Initialisation : comme $P^{(0)} = P, \deg(P^{(0)}) = \deg(P) = \deg(P) - m$.

- Hérédité : soit $m \in \llbracket 0, \deg(P) - 1 \rrbracket$. Supposons que $\deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$. Alors $\deg(P^{(m+1)}) = \deg((P^{(m)})') = \deg(P^{(m)}) - 1 = \deg(P) - m - 1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall m \in \llbracket 0, \deg(P) \rrbracket, \deg(P^{(m)}) = \deg(P) - m$.

13. (a) La multiplicité de α est $m_\alpha = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (X - \alpha)^k \mid P\}$.
 (b) $m_\alpha = \min\{k \in \mathbb{N} \mid P^{(k)}(\alpha) \neq 0\}$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $((X - \alpha)^n)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} (X - \alpha)^{n-p}$.

- Initialisation : pour $p = 0$, $((X - \alpha)^n)^{(0)} = (X - \alpha)^n$ et $\frac{n!}{(n-0)!} (X - \alpha)^{n-0} = (X - \alpha)^n$.
- Hérédité : soit $p \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Supposons que $((X - \alpha)^n)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} (X - \alpha)^{n-p}$.

$$\text{Alors } ((X - \alpha)^n)^{(p+1)} = \left(\frac{n!}{(n-p)!} (X - \alpha)^{n-p} \right)' = (n-p) \frac{n!}{(n-p)!} (X - \alpha)^{n-p-1} = \frac{n!}{(n-(p+1))!} (X - \alpha)^{n-(p+1)}.$$

D'après le principe de récurrence, $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, ((X - \alpha)^n)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} (X - \alpha)^{n-p}$.

Si $p > n$, alors $((X - \alpha)^n)^{(p)} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

15. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n et $\alpha \in \mathbb{K}$: $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.

16. En développant avec Newton : $P = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (X^2)^k (-1)^{2n-k}$. Donc le coefficient de degré $2n$ de P est $\binom{2n}{n} (-1)^n$.

D'autre part, en posant $A = (X - 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ et $B = (X + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} b_k X^k$, on a $AB = P$. De plus le coefficient de degré $2n$ de

$$AB \text{ est } \sum_{k=0}^{2n} a_k b_{2n-k}.$$

Or, avec Newton : pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $a_k = \binom{2n}{k} (-1)^{2n-k}$ et $b_k = \binom{2n}{k}$.

Donc le coefficient de degré $2n$ de AB est $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \binom{2n}{2n-k} (-1)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 (-1)^k$ par symétrie du triangle de Pascal.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}^2 (-1)^k = \binom{2n}{n} (-1)^n$.

17. (a) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$: $\overline{P(\alpha)} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \overline{\alpha}^k}$, donc $\overline{P(\alpha)} = P(\overline{\alpha})$.

(b) α est racine de $P \iff P(\alpha) = 0 \iff \overline{P(\alpha)} = 0 \iff P(\overline{\alpha}) = 0$, donc α est racine de P ssi $\overline{\alpha}$ est racine de P .

18. • Analyse : soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q(X + 1) = Q(X)$. Si Q n'est pas constant, alors d'après d'Alembert-Gauss, Q admet une racine complexe $\alpha \in \mathbb{C}$. Puis, $Q(\alpha + 1) = Q(\alpha) = 0$ donc $\alpha + 1$ est aussi racine de Q . De même $Q(\alpha + 2) = Q(\alpha + 1) = 0$, donc $\alpha + 2$ est racine de Q . On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + n$ est racine de Q . Donc Q a une infinité de racines et $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et Q est constant, ce qui est une contradiction. Ainsi, Q est constant.
 • Synthèse : un polynôme constant est bien solution du problème.

Ainsi, les seules solutions du problème sont les polynômes constants.

19. (a) • Analyse : soit $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que : $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

Alors pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $j \neq i$, $L_i(a_j) = 0$ et a_j est racine de L_i . Donc $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$ divise L_i . Comme L_i n'est pas nul,

on a donc $\deg(L_i) \geq n$. Mais comme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$, $\deg(L_i) = n$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $L_i = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (X - a_j)$. Puis,

$$L_i(a_i) = 1, \text{ donc } \lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (a_i - a_j)}. \text{ D'où } L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

• Synthèse : Posons $L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$. Alors $\deg(L_i) = n$, donc $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$. De plus, soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\triangleright \text{ si } k = i : L_i(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1;$$

$$\triangleright \text{ si } k \neq i : L_i(a_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} = 0.$$

Donc $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

Ainsi, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

(b) • Unicité : soit $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = b_j$ et $Q(a_j) = b_j$. Alors P et Q coïncident en $n+1$ points de \mathbb{C} et sont de degré inférieur ou égal à n . On a donc $P = Q$.

• Existence : posons $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$. Alors pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i \delta_{i,j} = b_j$.

Ainsi, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_j) = b_j$.

20. (a) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur \mathbb{K} s'il s'écrit comme un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1.

(b) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n scindé sur \mathbb{K} et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ses racines.

Alors $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $\alpha_1 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine complexe.

(d) Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

(e) Les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré de de discriminant strictement négatif.

21. Les racines de $X^6 - 1$ sont les racines sixièmes de l'unité.

Donc la factorisation de $X^6 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ est : $X^6 - 1 = \prod_{k=0}^5 (X - e^{\frac{2ik\pi}{6}})$.

On regroupe les racines complexes conjuguées : $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{i\frac{5\pi}{3}})(X - e^{i\frac{2\pi}{3}})(X - e^{i\frac{4\pi}{3}}) = (X-1)(X+1)(X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}})X + 1)(X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{i\frac{2\pi}{3}})X + 1)$, donc $X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$.

22. On remarque que $P(1) = 0$. Puis $P' = 5X^4 - 12X^3 - 6X^2 + 28X - 15$, donc $P'(1) = 0$. Puis, $P'' = 20X^3 - 36X^2 - 12X + 28$, donc $P''(1) = 0$. Puis $P''' = 60X^2 - 72X - 12$ et $P'''(1) \neq 0$. Donc 1 est racine de P de multiplicité 3.

On pose la division euclidienne de P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et on obtient $P = (X-1)^3(X^2 - 5) = (X-1)^3(X - \sqrt{5})(X + \sqrt{5})$.

Les racines de P sont donc 1 de multiplicité 3 et $\pm\sqrt{5}$ qui sont simples.

23. On applique le théorème de Rolle sur $[-2, -1]$: P est continue sur $[-2, -1]$, dérivable sur $] -2, -1[$ et $P(-2) = P(-1) = 0$. D'après Rolle, il existe $\alpha \in] -2, -1[$ tel que $P'(\alpha) = 0$. De même, comme $P(-1) = P(1) = P(2) = 0$, il existe $\beta \in] -1, 1[$ et $\gamma \in]1, 2[$ tels que $P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$. Ainsi, P' s'annule en $\alpha < \beta < \gamma$ qui sont trois réels distincts. Comme P' est de degré 3, il n'a pas d'autre racine.

Ainsi, P' a trois racines simples qui sont toutes réelles.

24. (a) D'après le cours, il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\frac{1}{(X-1)(X+2)(X+3)} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+2} + \frac{\gamma}{X+3}.$$

• On multiplie par $X-1$ et on évalue en 1 : $\frac{1}{12} = \alpha$.

• On multiplie par $X+2$ et on évalue en -2 : $-\frac{1}{3} = \beta$.

• On multiplie par $X+3$ et on évalue en -3 : $\frac{1}{4} = \gamma$.

Donc $\frac{1}{(X-1)(X+2)(X+3)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \frac{1}{X+2} + \frac{1}{4} \frac{1}{X+3}$.

(b) Une primitive de f sur $] -2, 1[$ est $x \mapsto \frac{1}{12} \ln(1-x) - \frac{1}{3} \ln(x+2) + \frac{1}{4} \ln(x+3)$.

25. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur I et $a \in I$. Alors f admet un $DL_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

26. (a) $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

(c) $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$

(b) $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(d) $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$

(e) $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$

(f) $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$

(g) $\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$

(h) $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

(i) $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$.

27. (a) $\frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

Donc

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \sin(x) \frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o(x^4) \right) \end{aligned}$$

donc $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

(b) $\frac{1}{\cos^2(x)} = \left(\frac{1}{\cos(x)} \right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \right)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

On primitive : $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$ et $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

28. (a) $x \cos(x) - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right)$, donc $x \cos(x) - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

(b)

$$\begin{aligned} x e^x \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) \end{aligned}$$

donc $x e^x \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

(c) $\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{1+x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{1}{8} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(x - \frac{x^3}{6} \right)^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

donc $\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$.

(d) On pose $u = x - 1 : \sqrt{1+x} = \sqrt{2+u} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{u}{2}} \underset{u \rightarrow 0}{=} \sqrt{2} \left(1 + \frac{u}{4} - \frac{u^2}{32} + \frac{u^3}{128} + o(u^3) \right)$.

Donc $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 1}{=} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de D vaut $\frac{11}{4}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{11}{4}x + b$ est une équation de D . Comme $A \in D$, $4 = \frac{33}{4} + b$ donc $b = -\frac{17}{4}$.

Ainsi, une équation de D est $y = \frac{11}{4}x - \frac{17}{4}$.

2. On a $\deg(R) < 2$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$. De plus, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = (X-3)(X-7)Q + aX + b$. On évalue en 3 et en 7 : $P(3) = 3a + b$ et $P(7) = 7a + b$.

Or il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = (X-3)Q_1 + 4$ et $P = (X-7)Q_2 + 15$. En évaluant de nouveau : $P(3) = 4$ et $P(7) = 15$.

Ainsi, $3a + b = 4$ et $7a + b = 15$. En soustrayant, $4a = 11$, donc $a = \frac{11}{4}$ et $b = -\frac{17}{4}$. Le reste est donc $R = \frac{11}{4}X - \frac{17}{4}$.

3. C'est la droite D qui est la sécante à la courbe représentative de P aux points d'abscisses 3 et 7.