

Devoir Surveillé de Cours 8

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Vingt-quatre questions indépendantes).

1. Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs du \mathbb{K} -espace vectoriel E .
 - (a) Rappeler la définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
 - (b) Montrer que $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.
 - (a) Rappeler la définition de famille libre et famille génératrice de E .
 - (b) Soit (u_1, \dots, u_p) une famille libre de E et $u \in E$:
 - i. À quelle condition la famille (u_1, \dots, u_p, u) est-elle libre ?
 - ii. À quelle condition $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$?
 - (c) Soit $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \cos(x)$. Montrer que (f, g) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$.
 - (a) Montrer que F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Déterminer une base de F .
4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Rappeler la définition de la somme de F et G .
 - (b) Rappeler la définition de F et G sont en somme directe.
 - (c) Montrer que F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$.
5. (a) Rappeler la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
 (b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit $F = \{y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid y'' - 3y' + 2y = 0\}$. Déterminer une famille génératrice de F .
7. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La famille (M, N, P) est-elle libre ?
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n . Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - (a) Rappeler la définition de p -liste de E . Combien y en a-t-il ?
 - (b) Rappeler la définition d'un arrangement de p éléments de E . Combien y en a-t-il ?
 - (c) Rappeler la définition de p -combinaison de E . Combien y en a-t-il ?
9. Soit $n \geq 1$. Un tournoi de tennis a $2n$ participants. On note $N(n)$ le nombre de façons d'apparier les joueurs au premier tour.
 - (a) Si $n \geq 2$, déterminer une relation entre $N(n)$ et $N(n-1)$.
 - (b) En déduire l'expression de $N(n)$ pour tout $n \geq 1$.
10. Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
 Établir la relation $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p}$ en comptant les parties à p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de deux façons différentes.
11. On lance trois fois un dé à 6 faces et on note dans l'ordre les résultats obtenus.
 Combien y a-t-il de possibilités pour lesquelles les trois résultats sont différents ?
12. Un groupe d'amis composé de 3 fumeurs et 7 non fumeurs doivent désigner un groupe de 4 personnes pour participer à une course.
 - (a) Combien y a-t-il de groupes différents possibles ?
 - (b) Combien y a-t-il de groupes différents possibles sans fumeur ?
 - (c) Combien y a-t-il de groupes différents possibles avec au moins un fumeur ?
13. (a) Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
 (b) Énoncer le théorème de la base incomplète.

- (c) Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
14. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Quelle est la dimension de $F + G$?
15. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de E .
- Rappeler la définition du rang de (u_1, \dots, u_p) .
 - Montrer que $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p \iff (u_1, \dots, u_p)$ est libre.
 - Montrer que $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n \iff (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E .
16. Soit $n \geq 1$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
- Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{ij}$.
 - Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
 - Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base \mathcal{L} .
17. Soient $P_1 = X^2 - 1, P_2 = X^2 - 2X - 2$ et $P_3 = X^2 + 4X + 1$. Calculer le rang de (P_1, P_2, P_3) .
18. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$.
- Montrer que E est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - Déterminer une base de E .
 - Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.
19. Soit $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 0 \right\}$.
- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - Déterminer la dimension de F .
 - Soit $G = \text{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
20. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$.
- Rappeler la définition de probabilité conditionnelle sachant B .
 - Montrer que P_B est une probabilité sur Ω .
21.
 - Rappeler la définition d'un système complet d'événements.
 - Énoncer la formule des probabilités totales.
 - Énoncer la formule de Bayes.
 - Énoncer la formule des probabilités composées.
 - Démontrer la formule des probabilités composées.
22. On dispose de 3 urnes vides et de 10 boules. On place au hasard les 10 boules dans les urnes : toutes les répartitions sont équiprobables.
Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même urne?
23. On dispose de 100 dés dont 25 sont truqués. Pour un dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$.
On choisit un dé au hasard, puis on le lance.
On note S : « on obtient 6 » et T : « le dé est truqué ».
- Déterminer $P(S)$.
 - On lance le dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué?
24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce truquée qui donne Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec probabilité q .
Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note F_i : « on obtient Face au i -ième lancer ».
- Donner une relation entre p et q .
 - On note A : « on obtient que des faces ». Écrire A à l'aide des F_1, \dots, F_n puis calculer $P(A)$ en fonction de p .
 - Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note B_k : « le premier Face est au k -ième lancer ». Écrire B_k avec les F_1, \dots, F_n , puis calculer $P(B_k)$.

Exercice 2 (Une droite).

Soient A et B deux points de \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives $(3, 4)$ et $(7, 15)$. On note D la droite (AB) .

- Déterminer une équation de la droite D .
- Est-ce que D est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ?

Correction du Devoir Surveillé de Cours 8

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p, \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$
 (b) • Comme $0_E = 0u_1 + \dots + 0u_p, 0_E \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$
 • Soient $x, y \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p$ et $y = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_p u_p.$
 Alors $\lambda x + y = (\lambda \lambda_1 + \mu_1)u_1 + \dots + (\lambda \lambda_p + \mu_p)u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$

Ainsi, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sev de $E.$

2. (a) Soit (u_1, \dots, u_p) une famille de vecteurs de $E.$
 • (u_1, \dots, u_p) est libre ssi $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$
 • (u_1, \dots, u_p) est génératrice de E ssi $\forall u \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p.$
 (b) i. (u_1, \dots, u_p, u) est libre ssi $u \notin \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$
 ii. $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u) \iff u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p).$
 (c) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lambda f + \mu g = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}.$
 Alors, $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0.$ En particulier, pour $x = 0, \mu = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}, \lambda = 0.$ Ainsi, (f, g) est libre.
3. (a) • $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} A = A 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})},$ donc $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \in F.$
 • Soient $M, N \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R} : A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A.$ Donc $\lambda M + N \in F.$

Ainsi, F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

- (b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :$

$$AM = MA \iff \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a+2b \\ a+2c = c+d \\ b+2d = c+2d \end{cases} \iff \begin{cases} -b+c = 0 \\ -a-b+d = 0 \\ a+c-d \\ b-c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+c-d = 0 \\ b-c = 0 \end{cases}$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} d-c & c \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d I_2$$

Donc $F = \text{Vect} \left(B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 \right).$ La famille (B, I_2) est génératrice de $F.$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lambda B + \mu I_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$ Alors $\begin{cases} -\lambda + \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases},$ et $\lambda = \mu = 0.$

Ainsi, (B, I_2) est une base de $F.$

4. (a) $F + G = \{y \in E \mid \exists (u, v) \in F \times G, y = u + v\}.$
 (b) On dit que F et G sont en somme directe si : $\forall y \in F + G, \exists!(u, v) \in F \times G \mid y = u + v.$
 (c) • \Rightarrow : Supposons que F et G sont en somme directe. Soit $x \in F \cap G.$ Alors $x = 0_E + x = x + 0_E$ sont deux décompositions de x dans $F + G.$ Par unicité de la décomposition, $x = 0_E.$ Donc $F \cap G \subset \{0_E\}.$ De plus, comme F et G sont des sev de $E, F \cap G$ aussi donc $0_E \in F \cap G.$ Donc $F \cap G = \{0_E\}.$
 • \Leftarrow : Supposons que $F \cap G = \{0_E\}.$ Soit $x \in F + G$ et soient $(u_F, u_G), (v_F, v_G) \in F \times G$ tels que $x = u_F + u_G$ et $x = v_F + v_G.$ Alors $u_F - v_F = v_G - u_G \in F \cap G.$ Donc $u_F - v_F = 0_E$ et $v_G - u_G = 0_E.$ Ainsi, $u_F = v_F$ et $u_G = v_G$: la décomposition de x est donc unique et F et G sont en somme directe.

D'où F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}.$

5. (a) Soient F et G deux sev de $E.$ On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E.$
 (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$
 • Analyse : soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A.$ Alors $M^T = S^T + A^T = S - A$ par linéarité de la transposée.
 Donc $M + M^T = 2S$ et $S = \frac{M + M^T}{2}.$ Par suite, $A = \frac{M - M^T}{2}.$
 • Synthèse : soient $S = \frac{M + M^T}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}.$
 On a $S + A = \frac{2M}{2} = M, S^T = \frac{M^T + M}{2} = S$ et $A^T = \frac{M^T - M}{2} = -A.$

Ainsi, tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose de façon unique comme somme d'un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et d'un élément de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) :$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$

6. On résoud l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ de solutions 1 et 2. Donc

$$\begin{aligned} F &= \{x \mapsto Ae^x + Be^{2x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}\} \\ &= \{A(x \mapsto e^x) + B(x \mapsto e^{2x}), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}) \end{aligned}$$

Ainsi, $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$ est une famille génératrice de F .

7. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Supposons que $\lambda_1 M + \lambda_2 N + \lambda_3 P = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 \\ \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille (M, N, P) est libre.

8. (a) Une p -liste de E est un élément de E^p . Il y en a n^p .

(b) Un arrangement de p éléments de E est une p -listes d'éléments distincts de E . Il y en a $\frac{n!}{(n-p)!}$.

(c) Une p -combinaison est une partie de E à p éléments. Il y en a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

9. (a) Pour appairer les $2n$ joueurs ensemble, on commence par choisir l'adversaire du premier joueur (il y a $2n - 1$ choix), puis on apparie les $2n - 2 = 2(n - 1)$ autres joueurs. Donc $N(n) = (2n - 1)N(n - 1)$.

(b) On obtient alors $N(n) = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 3N(1)$. Or $N(1) = 1$ et $N(n) = \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^n 2k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

10. Pour choisir une partie à p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on peut :

- choisir une partie qui contient 1 et 2 : il y en a $\binom{n-2}{p-2}$;
- choisir une partie qui contient 1 mais pas 2 : il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;
- choisir une partie qui contient 2 mais pas 1 : il y en a $\binom{n-2}{p-1}$;
- choisir une partie qui contient ni 1 ni 2 : il y en a $\binom{n-2}{p}$.

En tout on a donc $\binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}$ parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à p éléments.

Or, par définition, il y en a $\binom{n}{p}$.

$$\text{Ainsi, } \binom{n}{p} = \binom{n-2}{p-2} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p}.$$

11. On compte :

- il y a 6 résultats possibles pour le premier lancer
- il y a 5 résultats possibles pour le deuxième lancer
- il y a 4 résultats possibles pour le troisième lancer

En tout il y a $6 \times 5 \times 4 = 120$ possibilités qui donnent trois résultats différents.

12. (a) On choisit 4 personnes parmi les 10 : on a $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2}$, donc 210 groupes différents.

(b) On choisit 4 personnes parmi les 7 non fumeurs : on a $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}$, donc 35 groupes différents.

(c) C'est le complémentaire de l'ensemble précédent, donc il y a $210 - 35 = 175$ groupes différents.

13. (a) Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

(b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{F} et \mathcal{G} deux familles de vecteurs de E avec \mathcal{F} libre et \mathcal{G} génératrice de E . Alors on peut ajouter des vecteurs de \mathcal{G} à \mathcal{F} pour obtenir une base de E .

(c) Soit F un sev de E de dimension finie n . Alors F est aussi de dimension finie $p \leq n$. Il existe donc une base (f_1, \dots, f_p) de F que l'on peut compléter en une base $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_{n-p})$ de E . On pose alors $G = \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-p})$ qui est un supplémentaire de F dans E .

14. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$

15. (a) $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)).$

(b) La famille (u_1, \dots, u_p) est génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Elle est libre ssi c'est une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ ssi $p = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$.

(c) Comme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sev de E , (u_1, \dots, u_p) est génératrice de E ssi $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ ssi $n = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$

16. (a) • Analyse : soit $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$. On suppose que $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

Alors pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $j \neq i, L_i(a_j) = 0$, donc a_j est racine de L_i . Donc $\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k) | L_i$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$L_i = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k). \text{ Comme } \deg \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k) \right) = n \text{ et } \deg(L_i) \leq n, \deg(\lambda) \leq 0. \text{ Ainsi, } \lambda \text{ est constant.}$$

$$\text{De plus, } L_i(a_i) = 1 = \lambda \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k), \text{ donc } \lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)}.$$

$$\text{D'où } L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

• Synthèse : posons $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$. Alors $\deg(L_i) = n$, donc $L_i \in \mathbb{K}_n[X]$. Puis, $L_i(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1$, et si $j \neq i$,

$$L_i(a_j) = 0.$$

Ainsi, $\exists! L_i \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(a_j) = \delta_{i,j}.$

(b) Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons que $\lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on évalue en $a_i : \lambda_0 L_0(a_i) + \dots + \lambda_n L_n(a_i) = 0$, donc $\lambda_i = 0$.

Ainsi, (L_0, \dots, L_n) est libre de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$. \mathcal{L} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(c) Notons x_0, \dots, x_n les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L} : P = x_0 L_0 + \dots + x_n L_n$. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on évalue en $a_i : P(a_i) = x_i$.

Les coordonnées de P dans la base \mathcal{L} sont $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

17. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}[X]} \iff (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (-2\lambda_2 + 4\lambda_3)X - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \end{cases}$$

Pour $\lambda_3 = 1$, on obtient $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Donc $-3P_1 + 2P_2 + P_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $P_3 = 3P_1 - 2P_2 \in \text{Vect}(P_1, P_2)$.

Avec $\lambda_3 = 0$, on obtient $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0_{\mathbb{R}[X]} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc (P_1, P_2) est libre.

Ainsi, $\text{rg}(P_1, P_2, P_3) = \text{rg}(P_1, P_2) = 2$.

18. (a) • Soit $P = 0_{\mathbb{R}[X]} : P \in E$ car $P(1) = 0 = P(2)$.

• Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda P(2) + Q(2) = (\lambda P + Q)(2)$. Donc $\lambda P + Q \in E$.

Donc E est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X] :$

$$P \in E \iff a + b + c + d = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\iff c = -7a - 3b$$

$$\iff P = aX^3 + bX^2 + (-7a - 3b)X + d, \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\iff P = a(X^3 - 7X) + b(X^2 - 3X) + d, \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Donc $E = \text{Vect}(P_1 = 1, P_2 = X^2 - 3X, P_3 = X^3 - 7X) : (P_1, P_2, P_3)$ est une famille génératrice de E . La famille est libre car elle est échelonnée en degrés.

Ainsi, (P_1, P_2, P_3) est une base de E .

(c) On pose $P_4 = X$: la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est libre car échelonnée en degrés et de cardinal $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$. C'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Donc $G = \text{Vect}(X)$ est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}_3[X]$.

19. (a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ avec } a, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Donc F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) La famille (A, B, C) est génératrice de F . Elle est aussi libre. Donc c'est une base de F . Donc $\dim(F) = 3$.

(c) Déjà $\dim(G) = 1$, donc $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

De plus, $F \cap G$ est un sev de G , donc $\dim(F \cap G) \in \{0, 1\}$. Si on avait $\dim(F \cap G) = 1$, alors $F \cap G = F$ et $F \subset G$. Or $I_2 \notin F$ car $1 + 0 \neq 0$. Donc $\dim(F \cap G) = 0$.

Ainsi, F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

20. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un événement. La probabilité de A sachant B est $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

(b) • Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$: comme $A \cap B \subset B$, $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$, donc $0 \leq P_B(A) \leq 1$.

• $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

• Soient $A, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ incompatibles :

$$P_B(A \sqcup C) = \frac{P((A \sqcup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \sqcup (C \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = P_B(A) + P_B(C).$$

Ainsi, P_B est une probabilité sur Ω .

21. (a) Soit Ω un univers. Un système complet d'événements de Ω est une famille (A_1, \dots, A_n) d'événements de Ω tels que : $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$.

(b) Soit (Ω, P) un EPF et (A_1, \dots, A_n) un SCE de Ω . Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega) : P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$.

(c) Soit (Ω, P) un EPF et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)P(A)}{P(B)}$.

(d) Soit $n \geq 1$. Soit (Ω, P) un EPF et A_1, \dots, A_n des événements de Ω tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

(e) Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire.

Pour $n \geq 2$, on note $\mathcal{P}_n : \llcorner \forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ tels que } P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0,$

on a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \llcorner$.

• Initialisation : soient $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A_1) \neq 0$. Par définition, $P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}$, donc $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$.

• Hérité : soit $n \geq 2$. Supposons que \mathcal{P}_n est vraie.

Soit $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. On pose $A = A_{n+1}$ et $B = A_1 \cap \dots \cap A_n$ et on applique \mathcal{P}_2 : $P(A \cap B) = P(B)P_A(B)$.

De plus, comme $B \subset A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$, $0 < P(B) < P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$ et on applique \mathcal{P}_n :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

$$\text{Ainsi, } P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) = P(A \cap B) = P(B)P_A(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)P_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(A_{n+1}).$$

22. On note A : « toutes les boules sont dans la même urne ».

• Il y a 3 choix pour placer chaque boule dans une urne, donc $\text{card}(\Omega) = 3^{10}$.

• On choisit une urne (3 choix) et ensuite on met toutes les boules dedans (pas de choix) : $\text{card}(A) = 3$.

Comme on est en situation d'équiprobabilité, $P(A) = \frac{3}{3^{10}} = \frac{1}{3^9}$.

23. (a) On utilise le SCE (T, \bar{T}) et la formule des probabilité totale puis celle des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap T) + P(S \cap \bar{T}) \\ &= P(T)P_T(S) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(S) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc $P(S) = \frac{1}{4}$.

(b) On cherche $P_S(T)$. On utilise la formule de Bayes : $P_S(T) = \frac{P_T(S)P(T)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$, et $P_S(T) = \frac{1}{2}$.

24. (a) On a $p + q = 1$.

(b) $A = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$.

Par indépendance, $P(A) = P(F_1)P(F_2) \dots P(F_n)$ et $P(A) = (1 - p)^n$.

(c) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $B_k = \overline{F_1} \cap \dots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k$. Par indépendance, $P(B_k) = P(\overline{F_1}) \dots P(\overline{F_{k-1}})P(F_k)$ et $P(B_k) = p^{k-1}(1 - p)$.