Devoir Surveillé 8

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Huit questions indépendantes).

1. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   (a) Rappeler la définition de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   (a) Rappeler la définition de famille libre et famille génératrice de E.
   (b) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E et $u \in E$:
      i. À quelle condition la famille $(u_1, \dots, u_p, u)$ est-elle libre ?
      ii. À quelle condition $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p, u)$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal n. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
   (a) Rappeler la définition de p-liste de E. Combien y en a-t-il ?
   (b) Rappeler la définition d'un arrangement de p éléments de E. Combien y en a-t-il ?
   (c) Rappeler la définition de p-combinaison de E. Combien y en a-t-il ?
4. Un groupe d'amis composé de 3 fumeurs et 7 non fumeurs doivent désigner un groupe de 4 personnes pour participer à une course. Combien y a-t-il de groupes différents possibles avec au moins un fumeur ?
5. (a) Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
   (b) Énoncer le théorème de la base incomplète.
   (c) Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
6. Soit $F = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 0 \right\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la dimension de F.
   (c) Soit $G = \mathrm{Vect}(I_2)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. (a) Rappeler la définition d'un système complet d'événements.
   (b) Énoncer la formule des probabilités totales.
   (c) Énoncer la formule de Bayes.
   (d) Énoncer la formule des probabilités composées.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce truquée qui donne Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note F_i : « on obtient Face au i-ième lancer ».
   (a) On note A : « on obtient que des faces ». Écrire A à l'aide des $F_1, \dots, F_n$ puis calculer $P(A)$ en fonction de p.
   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k : « le premier Face est au k-ième lancer ». Écrire B_k avec les $F_1, \dots, F_n$, puis calculer $P(B_k)$.

Exercice 2 (Une droite).
Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(3,4)$ et $(7,15)$. On note D la droite (AB).

1. Déterminer une équation de la droite D.
2. Est-ce que D est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 (Une famille). Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : x \mapsto \sin^k(x)$.

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) = 0$. Que peut-on dire de P ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
   (c) L'espace vectoriel E est-il de dimension finie ? Justifier.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $F = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$.
   (a) Quelle est la dimension de F ?
   (b) La fonction cosinus est-elle un élément de F ?

Exercice 4 (Dénombrement). Si E est un ensemble et k un entier non nul, une partition de E est un ensemble $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à E :

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\}, A_i \neq \emptyset, \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,k\}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$$

Par exemple, $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ est une partition de $E = \{1,2,3,4,5\}$ en trois parties. On notera en particulier que l'ordre dans lequel interviennent les parties $A_1, \ldots, A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1,\ldots,n\}$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
Les nombres $S_{n,k}$ sont appelés nombres de Stirling de deuxième espèce.

1. (a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?
2. Soit n un entier avec $n \geq 2$, k un entier compris entre 1 et $n-1$ et $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.
   (a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1,2,3,4\}$ $(n=4)$ et $k=2$.
      i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.
      ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.
      iii. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
   (b) On revient au cas général.
      i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      iii. En déduire que $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On pourra par exemple procéder par récurrence.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0\leq k\leq N}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_k = \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \quad \text{pour tout } k \in \{1,\ldots,N\} \end{cases}$$

   (a) Montrer que la famille $(P_0,\ldots,P_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.
   (b) Pour tout entier $k \in \{0,\ldots,N-1\}$, démontrer l'égalité $XP_k = P_{k+1} + kP_k$.
   (c) En déduire par récurrence que, pour tout entier $n \in \{0,\ldots,N\}$, $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k$.

Exercice 5 (Des supplémentaires).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$ et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On considère un sous-espace vectoriel F de E de dimension $k \in [\![1, n-1]\!]$. On souhaite montrer que F a une infinité de supplémentaires dans E.

1. On choisit un supplémentaire G de F, on fixe $(e_1,\ldots,e_r)$ une base de G et on prend $a \in F$.
   (a) On veut montrer que la famille $(a+e_i)_{i\in[\![1,r]\!]} = (a+e_1, a+e_2,\ldots,a+e_r)$ est libre. Pour cela on prend $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1(a+e_1)+\cdots+\lambda_r(a+e_r) = 0_E$.
      i. Justifier que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r \in F$
      ii. En déduire que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r = 0_E$.
      iii. Conclure.
   (b) On pose $G_a = \mathrm{Vect}(a+e_1, a+e_2,\ldots,a+e_r)$.
      i. Montrer que F et G_a sont en somme directe.
      ii. En déduire que : $E = F \oplus G_a$.
2. (a) Soient $a, b \in F$. Montrer que $G_a = G_b \Rightarrow a = b$.
   (b) En déduire que F admet une infinité de supplémentaires dans E.
   (c) Faire un dessin lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et F est une droite de E pour illustrer ce résultat.

Exercice 6 (Deux pièces).
Dans tout l'exercice, on s'efforcera de justifier les calculs de probabilités effectués en précisant les formules utilisées et leurs hypothèses.
On dispose de deux pièces : la pièce 1 et la pièce 2. La pièce 1 donne face avec probabilité $p_1 \in]0,1[$ et la pièce 2 donne face avec probabilité $p_2 \in]0,1[$.
On commence par effectuer des lancers en suivant le protocole suivant :

- on choisit une des deux pièces au hasard;
- on effectue tous les lancers avec la pièce choisie.

On note C_1 l'évènement « on commence avec la pièce 1 » et C_2 l'évènement « on commence avec la pièce 2 », et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n : « le n-ième lancer donne face » et $u_n = P(F_n)$.
On a donc $P(C_1) = P(C_2) = \dfrac{1}{2}$.

1. On effectue trois lancers et on note D l'événement « on obtient au moins une fois face ». Écrire l'événement D à l'aide des événements F_1, F_2 et F_3.
2. Justifier que (C_1, C_2) est un système complet d'évènements.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de p_1 et p_2.

On change maintenant le protocole :

- on choisit une des deux pièces au hasard et on effectue le premier lancer avec celle-ci ;
- si le résultat d'un lancer est face, le lancer suivant sera avec la pièce 1, sinon on utilisera la pièce 2.

On reprend les mêmes événements et on note $v_n = P(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Exprimer v_1 en fonction de p_1 et p_2.
5. Quelle est la probabilité d'avoir choisi la première pièce sachant qu'on a obtenu face au premier lancer ? On exprimera le résulat en fonction de p_1 et p_2.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = (p_1 - p_2)v_n + p_2$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (p_1 - p_2)^{n-1}\left(\dfrac{p_1+p_2}{2} - \dfrac{p_2}{1-p_1+p_2}\right) + \dfrac{p_2}{1-p_1+p_2}$.
8. Déterminer la limite ℓ de la suite (v_n).
9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que $\ell = \dfrac{1}{2}$.
10. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements F_1 et F_2 soient indépendants.
11. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ soient indépendants.

Correction du Devoir Surveillé 8

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) $\boxed{\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)=\{\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_p u_p,\text{ avec }\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}\}.}$

   (b)
   - Comme $0_E=0u_1+\dots+0u_p$, $0_E\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.
   - Soient $x,y\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\mu_1,\dots,\mu_p\in\mathbb{K}$ tels que $x=\lambda_1u_1+\cdots\lambda_pu_p$ et $y=\mu_1u_1+\dots+\mu_pu_p$.
     Alors $\lambda x+y=(\lambda\lambda_1+\mu_1)u_1+\dots+(\lambda\lambda_p+\mu_p)u_p\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

   Ainsi, $\boxed{\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)\text{ est un sev de }E.}$

2. (a) Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de E.
   - $(u_1,\dots,u_p)$ est libre ssi $\forall\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$, $\lambda_1u_1+\dots+\lambda_pu_p=0_E\Rightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_p=0$.
   - $(u_1,\dots,u_p)$ est génératrice de E ssi $\forall u\in E$, $\exists\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$, $u=\lambda_1u_1+\dots+\lambda_pu_p$.

   (b) i. $(u_1,\dots,u_p,u)$ est libre ssi $u\notin\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.
   ii. $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p,u)\iff u\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

3. (a) Une p-liste de E est un élément de E^p. Il y en a n^p.

   (b) Un arrangement de p éléments de E est une p-listes d'éléments distincts de E. Il y en a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

   (c) Une p-combinaison est une partie de E à p éléments. Il y en a $\dbinom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

4.
   - On choisit 4 personnes parmi les 10 : on a $\dbinom{10}{4}=\dfrac{10!}{4!6!}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2}$, donc 210 groupes différents en tout.
   - On choisit 4 personnes parmi les 7 non fumeurs : on a $\dbinom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2}$, donc 35 groupes différents sans fumeur.
   - Donc il y a $\boxed{210-35=175\text{ groupes différents avec au moins un fumeur.}}$

5. (a) Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

   (b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles de vecteurs de E avec $\mathscr{F}$ libre et $\mathscr{G}$ génératrice de E.
   Alors on peut ajouter des vecteurs de $\mathscr{G}$ à $\mathscr{F}$ pour obtenir une base de E.

   (c) Soit F un sev de E de dimension finie n. Alors F est aussi de dimension finie $p\le n$. Il existe donc une base $(f_1,\dots,f_p)$ de F que l'on peut compléter en une base $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_{n-p})$ de E. On pose alors $G=\mathrm{Vect}(g_1,\dots,g_{n-p})$ qui est un supplémentaire de F dans E.

6. (a) $F=\left\{\begin{pmatrix}a&-a\\c&d\end{pmatrix},\text{ avec }a,c,d\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{Vect}\left(A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$. Donc $\boxed{F\text{ est un sev de }\mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

   (b) La famille (A,B,C) est génératrice de F. Elle est aussi libre. Donc c'est une base de F. Donc $\boxed{\dim(F)=3.}$

   (c) Déjà $\dim(G)=1$, donc $\dim(F)+\dim(G)=4=\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
   De plus, $F\cap G$ est un sev de G, donc $\dim(F\cap G)\in\{0,1\}$. Si on avait $\dim(F\cap G)=1$, alors $F\cap G=F$ et $F\subset G$. Or $I_2\notin F$ car $1+0\neq0$. Donc $\dim(F\cap G)=0$.
   Ainsi, $\boxed{F\text{ et }G\text{ sont supplémentaires dans }\mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$

7. (a) Soit Ω un univers. Un système complet d'événements de Ω est une famille $(A_1,\dots,A_n)$ d'événements de Ω tels que : $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$, $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$ et $\Omega=\displaystyle\bigsqcup_{i=1}^n A_i$.

   (b) Soit (Ω,P) un EPF et $(A_1,\dots,A_n)$ un SCE de Ω. Soit $B\in\mathscr{P}(\Omega)$: $P(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^n P(B\cap A_i)$.

   (c) Soit (Ω,P) un EPF et $A,B\in\mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A)>0$ et $P(B)>0$. Alors $P_B(A)=\dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.

   (d) Soit $n\ge1$. Soit (Ω,P) un EPF et $A_1,\dots,A_n$ des événements de Ω tels que $P(A_1\cap\dots\cap A_{n-1})\neq0$. Alors $P(A_1\cap\cdots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

8. (a) $\boxed{A=F_1\cap F_2\cap\dots\cap F_n.}$
   Par indépendance, $P(A)=P(F_1)P(F_2)\cdots P(F_n)$ et $\boxed{P(A)=(1-p)^n.}$

(b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$: $\boxed{B_k = \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k.}$ Par indépendance, $P(B_k) = P(\overline{F_1}) \cdots P(\overline{F_{k-1}}) P(F_k)$ et $\boxed{P(B_k) = p^{k-1}(1-p).}$

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de D vaut $\dfrac{11}{4}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = \dfrac{11}{4}x + b$ est une équation de D. Comme $A \in B$, $4 = \dfrac{33}{4} + b$ donc $b = -\dfrac{17}{4}$. Ainsi, une équation de D est $\boxed{y = \dfrac{11}{4}x - \dfrac{17}{4}.}$
2. $\boxed{\text{Non}}$ car le point $(0,0)$ n'est pas sur D.

Correction de l'exercice 3 :

1. (a) Le polynôme P a une infinité de racines : $\boxed{\text{c'est le polynôme nul!}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}.$$
   Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\lambda_0 + \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin^2(x) + \cdots + \lambda_n \sin^n(x) = 0.$$
   Si on pose $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin(x)) = 0$. Comme la fonction sinus est surjective sur $[-1,1]$, on a donc pour tout $y \in [-1,1]$, $P(y) = 0$. D'après la question précédente, P est le polynôme nul : tous ses coefficients sont nuls.
   Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre}}$.

   (c) $\boxed{\text{Non}}$: sinon, il aurait une dimension d, et toutes les familles libres dans E auraient un cardinal inférieur ou égal à d. Or, la question précédente affirme que $(f_0, \ldots, f_d)$ est libre : elle est de cardinal $d+1$ donc c'est une contradiction.
2. (a) Comme la famille $(f_0, \ldots f_n)$ est libre, $\boxed{\dim(F) = \mathrm{rg}(f_0, \ldots, f_n) = n+1}$.

   (b) Supposons qu'il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\cos = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$\cos(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin(x) + \cdots + \lambda_n \sin^n(x).$$
   En particulier, en prenant $x = 0$ on trouve $1 = \lambda_0$ et en prenant $x = \pi$, on obtient $-1 = \lambda_0$: contradiction!
   Ainsi, $\boxed{\cos \notin F}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. (a) Prenons un ensemble E à 3 éléments : on veut compter le nombre de partitions en 2 parties de E. Ces deux parties sont non vides, donc il y en a une de cardinal 1 et une de cardinal 2. Une fois qu'on a choisi la première, il n'y a plus de choix pour la seconde : on a donc 3 choix pour le singleton ce qui détermine complètement la partition. D'où $\boxed{S_{3,2} = 3}$.

   (b) Il n'y a qu'une seule partition d'un ensemble en une partie, donc $\boxed{S_{n,1} = 1}$.
   Il n'y a qu'une seule partition d'un ensemble de cardinal n en n parties : on prend tout ses singletons. Donc $\boxed{S_{n,n} = 1}$.
2. (a) i. Il n'y en a qu'une : $\boxed{\{\{4\}, \{1,2,3\}\}}$.

   ii. On y va méthodiquement : on commence par énumérer les cas où la partie contenant 4 est de cardinal 2, puis on fait les cas où elle est de cardinal 3 : $\{\{1,4\},\{2,3\}\}, \{\{2,4\},\{1,3\}\}, \{\{3,4\},\{1,2\}\}$, $\{\{1,2,4\},\{3\}\}, \{\{1,3,4\},\{2\}\}, \{\{2,3,4\},\{1\}\}$.

   iii. Ici, $S_{3,1} = 1$ correspond au nombre de partitions de $\{1,2,3\}$ en une partie et $S_{3,2} = 3$ au nombre de partitions de $\{1,2,3\}$ en 2 parties. On a trouvé $S_{4,2} = 7$ et $S_{3,1} + 2 \times S_{3,2} = 7$, donc on a bien $\boxed{S_{4,2} = S_{3,1} + 2 \times S_{3,2}}$.

   (b) i. Pour choisir une partition de E en k parties dont $\{x_n\}$ fait partie, il ne reste qu'à choisir une partition de $E \setminus \{x_n\}$ en $k-1$ parties. $\boxed{\text{Il y en a donc } S_{n-1,k-1}}$.

   ii. Pour obtenir une partition de E en k parties dont l'une contient x_n sans être le singleton $\{x_n\}$, on commence par prendre une partition de $E \setminus \{x_n\}$ en k parties (il y en a $S_{n-1,k}$) et on place ensuite x_n dans une des parties (il y a k choix). Donc en tout, on a $\boxed{kS_{n-1,k} \text{ partitions possibles}}$.

   iii. Les partitions de E en k parties se séparent en celles pour lesquelles $\{x_n\}$ est une des parties (il y en a $S_{n-1,k-1}$) et les autres (il y en a $kS_{n-1,k}$) : donc $\boxed{S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}}$.
3. Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que $S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$:
   - Initialisation : pour $n = 2$, $S_{2,1} = 1$ et $\dfrac{n(n-1)}{2} = 1$, donc la propriété est vraie.

- Hérédité : soit $n \geq 2$ et supposons que $S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

  Alors $S_{n+1,n} = S_{n,n-1} + nS_{n,n} = \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n-1+2)}{2} = \dfrac{(n+1)n}{2}$.

D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2,\ S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}}$.

4. (a) La famille est libre car elle est échelonnée en degrés. Comme elle est de cardinal $N+1 = \dim(\mathbb{R}_N[X])$, $\boxed{(P_0,\dots,P_N) \text{ est une base de } \mathbb{R}_N[X]}$.

   (b) Si $k=0$, on a bien $XP_0 = X$ et $P_1 + 0P_0 = X$.
   Soit $k \in \{1,\dots N-1\}$,

$$P_{k+1} = \prod_{j=0}^{k}(X-j) = (X-k)\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) = (X-k)P_k.$$

   donc $\boxed{\forall k \in [\![0,N-1]\!],\ XP_k = P_{k+1} + kP_k}$.

   (c)
   - Initialisation : pour $n=0$, $X^0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} S_{0,k}P_k = S_{0,0}P_0 = 1$.
   - Hérédité : soit $n \in [\![0,N-1]\!]$, et supposons que $X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k$.

     Alors $X^{n+1} = X\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k$ par HR, donc $X^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}XP_k$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
X^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}(P_{k+1}+kP_k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} kS_{n,k}P_k\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} S_{n,k-1}P_k + \sum_{k=0}^{n} kS_{n,k}P_k\\
&= \sum_{k=1}^{n} (S_{n,k-1}P_k + kS_{n,k}P_k) + S_{n,n}P_{n+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} S_{n+1,k}P_k + S_{n+1,n+1}P_{n+1} + S_{n+1,0}P_0\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} S_{n+1,k}P_k
\end{aligned}$$

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in [\![0,N]\!],\ X^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. Pour obtenir au moins une fois face, on fait face au premier lancer ou au deuxième ou au troisième. Donc $\boxed{D = F_1 \cup F_2 \cup F_3}$.
2. Comme $C_2 = \overline{C_1}$, (C_1, C_2) est bien un SCE.
3. En appliquant la FPT avec le SCE (C_1,C_2) : $P(F_n) = P(C_1)P_{C_1}(F_n) + P(C_2)P_{C_2}(F_n)$, donc $\boxed{u_n = \dfrac{p_1+p_2}{2}}$.
4. On utilise le SCE (C_1,C_2) et la FPT : $P(F_1) = P(C_1)P_{C_1}(F_1) + P(C_2)P_{C_2}(F_1)$, donc $\boxed{v_1 = \dfrac{p_1+p_2}{2}}$.
5. On veut calculer $P_{F_1}(C_1)$. On utilise Bayes : $P_{F_1}(C_1) = \dfrac{P(C_1)P_{C_1}(F_1)}{P(F_1)} = \dfrac{\frac{1}{2}p_1}{v_1}$, donc $\boxed{P_{F_1}(C_1) = \dfrac{p_1}{p_1+p_2}}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise le SCE $(F_n, \overline{F_n})$ et la FPT : $P(F_{n+1}) = P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P(\overline{F_n})P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) = v_np_1 + (1-v_n)p_2$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = (p_1-p_2)v_n + p_2}$.
7. C'est une suite arithmético-géométrique : on pose ℓ tel que $\ell = (p_1-p_2)\ell + p_2$, ce qui donne $\ell = \dfrac{p_2}{1-p_1+p_2}$, car $1-p_1+p_2 > p_2 > 0$.
   Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - \ell = (p_1-p_2)(v_n - \ell)$, donc $v_n - \ell = (p_1-p_2)^{n-1}(v_1-\ell)$.
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (p_1-p_2)^{n-1}(v_1-\ell) + \ell}$.

8. Comme $p_1, p_2 \in]0,1[$, on a $p_1 - p_2 \in]-1,1[$, donc $(p_1-p_2)^{n-1} \to 0$. Ainsi, $\boxed{v_n \to \ell = \dfrac{p_2}{1-p_1+p_2}}$.
9. $\boxed{\ell = \dfrac{1}{2} \iff 2p_2 = 1-p_1+p_2 \iff p_2 = 1-p_1}$.
10. On a $P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P_{F_1}(F_2) = v_1 p_1$, donc F_1 et F_2 sont indépendants ssi $v_1 p_1 = v_1 v_2$. Or, v_1 est non nulle, et $v_2 = (p_1-p_2)v_1 + p_2$, donc F_1 et F_2 sont indépendants ssi $p_1 = (p_1-p_2)v_1 + p_2$ ssi $(p_1-p_2)(1-v_1) = 0$. Or, $v_1 = 1 \iff p_1 = p_2 = 1$, ce qui est impossible. Donc $\boxed{F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont indépendants ssi } p_1 = p_2}$.
11. D'après le cours, F_1 et F_2 sont indépendants ssi $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ sont indépendants. Donc $\boxed{\overline{F_1} \text{ et } \overline{F_2} \text{ sont indépendants ssi } p_1 = p_2}$.

Correction de l'exercice 5 :

1. (a) i. En développant, on trouve $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k + \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\right) a = 0_E$ puis $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k = -\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\right) a$. Or $a \in F$, donc $\boxed{\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k \in F}$.

   ii. D'après 1(a)i, $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k \in F \cap G$. Comme F et G sont supplémentaires, $F \cap G = \{0_E\}$, donc $\boxed{\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k = 0_E}$.

   iii. Comme la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est libre, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (a+e_i)_{i \in [\![1,r]\!]} \text{ est libre}}$.

   (b) i. Prenons $u \in F \cap G_a$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1(a+e_1) + \cdots + \lambda_r(a+e_r)$.
   Puis $u = \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)a}_{\in F} + \underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r}_{\in G} = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. Comme F et G sont en somme directe, la décomposition est unique donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r = 0_E$. La famille $(e_1, \dots, e_r)$ étant libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.
   Ainsi, $u = 0_E$ et $\boxed{F \cap G_a = \{0_E\}}$.

   ii. Déjà $\dim(G_a) = r$ d'après la question 1a. De plus, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ car F et G sont supplémentaires. Donc $\boxed{\dim(F) + \dim(G_a) = \dim(E)}$.
   Comme F et G sont en somme directe, $\boxed{F \text{ et } G_a \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

2. (a) Supposons que $G_a = G_b$. En particulier, $e_1 + a \in G_b$, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ tels que $e_1 + a = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k (b + e_k)$.
   En développant et en réorganisant, $a - \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\right) b = (\lambda_1 - 1)e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_r e_r$. Ce vecteur étant dans $F \cap G$, il est nul et comme la famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. D'où $e_1 + a = e_1 + b$ et $\boxed{a = b}$.

   (b) Comme $\dim(F) > 0$, il y a une infinité de vecteurs dans F. De plus, par contraposée, si $a, b \in F$ avec $a \neq b$, alors $G_a \neq G_b$.
   Autrement dit, pour chaque vecteur de F on a un supplémentaire différent : $\boxed{F \text{ admet donc une infinité de supplémentaire}}$

   (c) On fait un dessin !