

Devoir Surveillé 9

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.**Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.**La calculatrice est interdite.***Exercice 1 (Neuf questions indépendantes).**

1. (a) Donner la définition de rang d'une application linéaire.
(b) Énoncer le théorème du rang.
(c) Donner la définition d'une projection et d'une symétrie.
2. (a) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
(b) Énoncer le résultat de stricte positivité de l'intégrale.
3. Calculer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + 3\frac{k}{n}}$.
4. (a) Soit E un \mathbb{K} -ev et \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases de E . Donner la définition de matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
(b) Énoncer la formule de changement de base pour une application linéaire.
5. (a) Énoncer l'inégalité de Markov.
(b) Rappeler la définition de la variance.
(c) Énoncer et démontrer la formule de Huygens.
(d) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
6. (a) Rappeler le résultat concernant la convergence et la somme des séries géométriques.
(b) Rappeler le résultat concernant la convergence et la somme des séries exponentielles.
7. Déterminer la nature des séries :

(a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$	(b) $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$	(c) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$.
---	--	--
8. On pose $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout $f, g \in E$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
9. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la démontrer.

Exercice 2 (Un endomorphisme).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E , tel que :

$$u^2 - 3u + 2\text{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où 0 désigne l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que u est un automorphisme de E et donner u^{-1} .
2. On pose $v = u - \text{id}_E$ et $w = u - 2\text{id}_E$.
 - (a) Soit $x \in \ker(v)$ et $y \in \ker(w)$. Que valent $u(x)$ et $u(y)$?
 - (b) Préciser $v \circ w$ et $w \circ v$.
 - (c) Prouver que $\text{Im}(w) \subset \ker(v)$ et que $\text{Im}(v) \subset \ker(w)$.
 - (d) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ et en déduire que $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$.
 - (e) Démontrer que $E = \ker(v) \oplus \ker(w)$.
3. Comment peut-on déterminer une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale?
4. On note p le projecteur sur $\ker(v)$ parallèlement à $\ker(w)$ et q le projecteur sur $\ker(w)$ parallèlement à $\ker(v)$.
 - (a) Soit $x \in E$. Que vaut $p(x) + q(x)$? En déduire que $u(x) = p(x) + 2q(x)$.
 - (b) Déterminer $p(x)$ et $q(x)$ à l'aide de $v(x)$ et $w(x)$.
 - (c) Soit $n \geq 1$. Justifier qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ tels que $u^n = a_n p + b_n q$. On donnera les expressions de a_n et b_n en fonction de n .
 - (d) L'expression précédente est-elle encore valable pour $n = -1$?

5. Application

Dans cette question, E est de dimension trois. On munit E de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et, dans

cette base, on définit l'endomorphisme u par sa matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Vérifier que u satisfait à la relation (\star) . *On fera apparaître les calculs sur la copie.*
- (b) Déterminer les matrices V et W des endomorphismes v et w définis à la question 2.
- (c) Déterminer une base \mathcal{B}_1 de $\ker(v)$ et une base \mathcal{B}_2 de $\ker(w)$.
- (d) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $U = PDP^{-1}$.

Exercice 3 (Une urne).

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire;
- si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

L'objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que si X est une variable aléatoire et A un événement, la loi conditionnelle de X sachant A est donnée par la distribution de probabilités $(P_A(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Partie I - Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1 .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?
4. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Déterminer $E(X)$ en justifiant.

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
6. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

7. Exprimer l'espérance de S_n en fonction des espérances de X_1, \dots, X_n .
8. Montrer par récurrence forte que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour l'hérédité, on pourra commencer par calculer $E(S_n)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Exercice 4 (Une série écrite comme une intégrale).

1. Prouver que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ converge.

Le but de cet exercice est de trouver une expression de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ à l'aide d'une intégrale.

On définit la fonction f sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) = \frac{\ln(t)}{1+t^2}$$

et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

2. (a) Justifier que F est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .
 (b) Étudier les variations de F sur \mathbb{R}_+^* .

3. On considère la fonction $u : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

- (a) Justifier que u est continue sur \mathbb{R}_+^* et prolongeable par continuité en 0.
 (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x u(t) dt.$$

- (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = \int_0^1 u(t) dt$.

On pourra faire intervenir la fonction $U : x \mapsto \int_1^x u(t) dt$.

4. (a) Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.
 (b) En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.
 5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt.$$

- (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

puis la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ sous la forme d'une intégrale.

Correction du Devoir Surveillé 9

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, on dit que f est de rang fini et on note $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ le rang de f .
- (b) Soient E et F deux \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 - Soit S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Alors $f|_S$ est un isomorphisme de S dans $\text{Im}(f)$.
 - Si E est de dimension finie, $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$.
- (c) Soit E un \mathbb{K} -ev et F et G deux sev supplémentaires dans E . Pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ sa décomposition dans la somme directe $E = F \oplus G$.
 - La projection de x sur F parallèlement à G est $p_{F,G}(x) = x_F$.
 - Le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G est $s_{F,G}(x) = x_F - x_G$.

2. (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .
- (b) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.

3. Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+3x}$ qui est une fonction continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

Or, $\int_0^1 \frac{1}{1+3t} dt = \frac{1}{3} [\ln(1+3t)]_0^1 = \frac{\ln(4)}{3}$.

Donc $u_n \rightarrow \frac{\ln(4)}{3}$.

4. (a) La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} est $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E)$: ce sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{C} écrits dans la base \mathcal{B} .

(b) Soient E et F deux \mathbb{K} -ev avec $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$.

5. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+ et $a > 0$. Alors $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.
- (b) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. Alors $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$.
- (c) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
En effet, $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ car l'espérance est linéaire.
- (d) Soit X une variable aléatoire réelle et $\varepsilon > 0$: $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

6. (a) Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum a^n$ converge ssi $|a| < 1$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

- (b) Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$.

7. (a) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par équivalence de SATP, $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

- (b) $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 1 \neq 0$, donc la série diverge grossièrement.

- (c) $\left| \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2} \right| \sim \frac{|\cos(n)|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$. Par comparaison de SATP, $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^{3/2}}$ converge. Par équiva-

lence de SATP, $\sum \left| \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2} \right|$ converge donc $\sum \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

8. • Symétrie : soit $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$.
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
- Bilinéarité : soit $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda f + g, h \rangle = \int_a^b (\lambda f + g)(t)h(t)dt = \int_a^b (\lambda f(t)h(t) + g(t)h(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ par linéarité de l'intégrale.
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et par symétrie, bilinéaire.
- Positivité : soit $f \in E$, $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.
- Définie positivité : soit $f \in E$. Supposons que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$, et comme f^2 est continue et positive sur $[a, b]$, par stricte positivité de l'intégrale, $\forall t \in [a, b], f(t)^2 = 0$, donc $f = 0_E$.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

9. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel de norme associée $\|\cdot\|$. Soit $x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Si $y = 0_E$, alors l'inégalité est vérifiée.

Si non, posons $P : t \mapsto \|x + ty\|^2$ définie sur \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}, P(t) \geq 0$ et $P(t) = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2$. Donc P est une fonction polynomiale du second degré qui s'annule au maximum une fois sur \mathbb{R} : son discriminant est négatif ou nul.

Ainsi, $(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$ et $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Par croissance de la racine carrée : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Correction de l'exercice 2 :

1. D'après la relation donnée, $(u - 3 \text{id}_E) \circ u = 2 \text{id}_E$, donc $\frac{1}{2}(u - 3 \text{id}_E) \circ u = \text{id}_E$. Ainsi, u est un automorphisme de E et $u^{-1} = \frac{1}{2}(u - 3 \text{id}_E)$.

2. (a) Comme $v(x) = (u - \text{id}_E)(x) = 0_E$, on a $u(x) = x$. De même $u(y) = 2y$.

(b) $v \circ w = (u - \text{id}_E) \circ (u - 2 \text{id}_E) = u^2 - 3u + 2 \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $w \circ v = (u - 2 \text{id}_E) \circ (u - \text{id}_E) = u^2 - 3u + 2 \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(c) Soit $y \in \text{Im}(w)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = w(x)$. Donc $v(y) = v \circ w(x) = 0_E$ d'après la question précédente. Donc $\text{Im}(w) \subset \ker(v)$.

Soit $y \in \text{Im}(v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Donc $w(y) = w \circ v(x) = 0_E$. Donc $\text{Im}(v) \subset \ker(w)$.

(d) On a $v - w = \text{id}_E$. Soit $x \in E$. Alors $x = \text{id}_E(x) = (v - w)(x) = v(x) + w(-x)$. Donc $x \in \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$. Donc $E \subset \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$. Or, $\text{Im}(v)$ et $\text{Im}(w)$ sont des sev de E , donc $\text{Im}(v) + \text{Im}(w) \subset E$.

Donc $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$.

(e) D'après la question 3c : $\text{Im}(v) + \text{Im}(w) \subset \ker(v) + \ker(w)$. D'après la question 2d, $E \subset \ker(v) + \ker(w)$, et comme $\ker(v) + \ker(w)$ est un sev de E , on a $E = \ker(v) + \ker(w)$.

Puis, soit $x \in \ker(v) \cap \ker(w)$. Alors $u(x) = x$ et $u(x) = 2x$, donc $x = 0_E$. Ainsi, $\ker(v)$ et $\ker(w)$ sont en somme directe.

D'où $\ker(v) \oplus \ker(w) = E$.

3. On prend une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_k)$ de E adaptée à la somme directe $\ker(v) \oplus \ker(w) = E : (e_1, \dots, e_m)$ est une base de $\ker(v)$ donc pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket, u(e_i) = e_i$ et (f_1, \dots, f_k) est une base de $\ker(w)$ donc pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket, u(f_i) = 2f_i$. Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$.

4. (a) On a $x = p(x) + q(x)$, donc $u(x) = u(p(x) + q(x)) = p(x) + 2q(x)$.

(b) On trouve $q(x) = u(x) - x = v(x)$ et $p(x) = -w(x)$.

(c) On a $u^n = (p + 2q)^n$. Or d'après la question précédente, p et q commutent, donc on peut appliquer Newton :

$$u^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} p^k q^{n-k}.$$

Or, $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc tous les termes s'annulent sauf le premier et le dernier :

$$u^n = \binom{n}{0} 2^n q^n + \binom{n}{n} p^n = p^n + 2^n q^n.$$

Or, p et q sont des projecteurs, donc comme $n \geq 1, p^n = p$ et $q^n = q$. Donc $u^n = p + 2^n q$.

(d) On remarque que $u \circ (p + \frac{1}{2}q) = (p + 2q) \circ (p + \frac{1}{2}q) = p^2 + q^2 + \frac{5}{2}pq = \text{id}_E$ car $pq = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $p + q = \text{id}_E$.

Donc $u^{-1} = p + 2^{-1}q$ et la formule est encore vraie pour $n = -1$.

5. (a) On calcule $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, donc $U^2 - 3U + 2I_3 = 0_3$ et u vérifie bien la relation voulue.

(b) $V = U - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $W = U - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On résout le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\ker(V) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(V)$. Une base de $\ker(v)$ est donc $e_1 + e_3$.

On résout ensuite

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \iff x = y$$

donc $\ker(W) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\ker(W)$. Une base de $\ker(w)$ est donc $(e_1 + e_2, e_3)$.

(d) D'après la question 3, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la formule de changement

de base : $U = P_{\mathcal{B}}^{-1} D P_{\mathcal{B}'}$. Donc $P = P_{\mathcal{B}'}^{-1} U P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Déjà, $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ par définition de X_1 .

Au premier tirage, il y a b boules blanches et r boules rouges. Donc la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{b}{b+r}$. Donc $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

2. On a encore $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$. Le sujet est bizarrement posé : on a plutôt besoin de $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ et $P(X_2 = 1|X_1 = 1)$.

• Si on a tiré une boule blanche au premier tirage, au second tirage, il y a $b+1$ boules blanches et $b+r+1$ boules en tout, donc

$$P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{b+1}{b+r+1}$$

• Si on a tiré une boule rouge au premier tirage, au second tirage, il y a b boules blanches et $b+r+1$ boules en tout, donc $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{b}{b+r+1}$.

On utilise le SCE ($X_1 = 1$), ($X_1 = 0$) et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_2 = 1, X_1 = 1) + P(X_2 = 1, X_1 = 0) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1|X_1 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1|X_1 = 0) \\ &= \frac{b}{b+r} \frac{b+1}{b+r+1} + \frac{r}{b+r} \frac{b}{b+r+1} \\ &= \frac{b(b+1) + br}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r} \end{aligned}$$

donc $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

3. S_n compte le nombre de boules blanches après n tirages. On a donc $S_n(\Omega) = \llbracket b, b+n \rrbracket$.

4. $E(X) = 0P(X=0) + 1P(X=1) = p$.

5. Soit $k \in \llbracket b, b+n \rrbracket$. Si $S_n = k$, il y a donc k boules blanches dans l'urne et $b+r+n$ boules en tout après le n -ième tirage. Donc $P(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}$.

6. On utilise le SCE ($S_n = k$) $_{k \in \llbracket b, b+n \rrbracket}$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} P(X_{n+1} = 1, S_n = k) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k)P(X_{n+1} = 1|S_n = k) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k) \frac{k}{b+r+n} \\ &= \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=b}^{b+n} kP(S_n = k) \end{aligned}$$

donc $P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}$.

7. $E(S_n) = E(b + \sum_{k=1}^n X_k) = b + \sum_{k=1}^n E(X_k)$.

8. Pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est déjà fait dans la partie I.

Soit $n \geq 1$ et supposons que $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

Alors $E(S_n) = b + n \frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}$.

D'après la question précédente, $P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n} = \frac{b}{b+r}$. Donc $X_{n+1} \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

On conclut par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

Correction de l'exercice 4 :

1. $\left| \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \sim \frac{1}{4k^2}$. Or $\sum \frac{1}{k^2}$ converge car $2 > 1$. Par comparaison de SATP, $\sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ converge absolument, donc elle converge.

2. (a) La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations. D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est la primitive de f qui s'annule en 1. Donc F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $F' = f$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . Donc F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

(b) D'après la question précédente, F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $F' = f$. Or, f est négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$.
Donc F est décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$.

3. (a) u est continue sur \mathbb{R}_+^* par opérations. De plus, $u(x) \sim \frac{x}{x} = 1$.

Donc u est prolongeable par continuité en 0 en posant $u(0) = 1$.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On fait une IPP : on prend $v : t \mapsto \ln(t)$ et $w : t \mapsto \arctan(t)$ de sorte que $v' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $w' : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$,

$$F(x) = \int_1^x v(t)w'(t)dt = [v(t)w(t)]_1^x - \int_1^x v'(t)w(t)dt = \ln(x)\arctan(x) - \int_1^x u(t)dt$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = \ln(x)\arctan(x) - \int_1^x u(t)dt$.

- (c) Comme u est prolongée par continuité sur \mathbb{R}_+ , d'après le théorème fondamental de l'analyse, $U : x \mapsto \int_1^x u(t)dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ .

De plus, $\arctan(x)\ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par croissances comparées, donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -U(0) = \int_0^1 u(t)dt$.

Ainsi, F est prolongeable par continuité en 0 en posant $F(0) = \int_0^1 u(t)dt$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $s = \frac{1}{t}$ de sorte que $t = \frac{1}{s}$ et $dt = -\frac{1}{s^2}ds$. De plus, lorsque $t = 1$, $s = 1$ et lorsque $t = x$, $s = \frac{1}{x}$:

$$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} -\frac{1}{s^2} \frac{\ln(1/s)}{1+\frac{1}{s^2}} ds = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(s)}{1+s^2} ds = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

- (b) D'après la question précédente et la question 3c, $F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} F(0) = \int_0^1 u(t)dt$.

5. (a) On fait une IPP en prenant $v : t \mapsto \ln(t)$ et $w : t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$

$$I_k(x) = \frac{1}{k+1} [t^{k+1}\ln(t)]_1^x - \frac{1}{k+1} \int_1^x t^k dt.$$

Donc $I_k(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2(n+1)}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Donc $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

- (c) Soit $x \in]0, 1[$. On multiplie l'égalité précédente par $\ln(t)$ puis on intègre de 1 à x :

$$F(x) = \int_1^x \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \ln(t) + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} \right) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt$$

par linéarité de l'intégrale.

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5a et la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et tout $x \in]0, 1[$,

$$F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x^{2k+1} \ln(x)}{2k+1} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire (en faisant attention aux signes car $x < 1$) :

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{x^{2k+1} \ln(x)}{2k+1} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2} \right) \right| &\leq \int_x^1 \frac{t^{2n+2} |\ln(t)|}{1+t^2} dt \\ &\leq - \int_x^1 t^{2n+2} \ln(t) dt \\ &= I_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{2n+3} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2}. \end{aligned}$$

On prend maintenant la limite lorsque $x \rightarrow 0^+$ (par croissances comparées) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| F(0) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

Or, $\frac{1}{(2n+3)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par encadrement, $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(0) = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt$.