

Devoir Surveillé de Cours 9

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Vingt et une questions indépendantes).

1. (a) Donner la définition de rang d'une application linéaire.
(b) Énoncer le théorème du rang.
(c) Donner la définition d'une projection et d'une symétrie.
2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
(a) Donner les définitions de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
(b) Montrer que $\ker(f)$ est un sev de E .
(c) Montrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.
(d) Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs de E . Montrer que $f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
3. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .
4. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(a) Montrer que $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \ker(f - 2\text{id}_E)$ et $\text{Im}(f - 2\text{id}_E) \subset \ker(f - \text{id}_E)$.
(b) Montrer que $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$.
5. (a) Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
(b) Énoncer le résultat de stricte positivité de l'intégrale.
6. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.
(c) Déterminer la limite et un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.
(a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et en déduire que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.
(c) Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
8. (a) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
(b) En appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, calculer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
9. Calculer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+3\frac{k}{n}}$.
10. (a) Soit E un \mathbb{K} -ev et \mathcal{B} et \mathcal{C} deux bases de E . Donner la définition de matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
(b) Énoncer la formule de changement de base pour une application linéaire.
11. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit f l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
(a) Déterminer une base de $F = \ker(f - \text{id}_E)$, $G = \ker(f - 2\text{id}_E)$ et de $H = \ker(f + 4\text{id}_E)$.
(b) Déterminer une base \mathcal{C} de E dans laquelle la matrice de f est diagonale et préciser les matrices de passage entre \mathcal{B} et \mathcal{C} et la relation entre toutes ces matrices.
12. (a) Rappeler la définition d'une loi de Bernoulli, son espérance et sa variance.

- (b) Rappeler la définition d'une loi binomiale, son espérance et sa variance.
 (c) Quelle est la relation entre les deux?
13. (a) Énoncer l'inégalité de Markov.
 (b) Rappeler la définition de la variance.
 (c) Énoncer et démontrer la formule de Huygens.
 (d) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
14. (a) Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles.
 (b) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
 Calculer $\text{Cov}(U, V)$ puis montrer que U et V ne sont pas indépendantes.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs lancent n fois une pièce équilibrée. On note X_1 et X_2 les nombres de piles obtenus par les joueurs 1 et 2.
 (a) Quelle loi suivent X_1 et X_2 ?
 (b) Calculer la probabilité que les deux joueurs obtiennent le même nombre de piles.
 On admettra que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
 (c) On note $Y = X_1 - X_2$. Déterminer l'espérance et la variance de Y .
16. (a) Rappeler le résultat concernant la convergence et la somme des séries géométriques.
 (b) Rappeler le résultat concernant la convergence et la somme des séries exponentielles.
17. Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $u_n \rightarrow 0$.
 Donner un contre-exemple pour la réciproque.
18. Soit $\alpha > 1$. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
19. Déterminer la nature des séries :
- (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
 (b) $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 (c) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$.
20. On pose $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Pour tout $f, g \in E$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
21. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la démontrer.

Correction du Devoir Surveillé de Cours 9

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, on dit que f est de rang fini et on note $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ le rang de f .
- (b) Soient E et F deux \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 - Soit S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Alors $f|_S$ est un isomorphisme de S dans $\text{Im}(f)$.
 - Si E est de dimension finie, $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\ker(f))$.
- (c) Soit E un \mathbb{K} -ev et F et G deux sev supplémentaires dans E . Pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ sa décomposition dans la somme directe $E = F \oplus G$.
 - La projection de x sur F parallèlement à G est $p_{F,G}(x) = x_F$.
 - Le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G est $s_{F,G}(x) = x_F - x_G$.

2. (a) $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ et $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.
- (b)
 - $f(0_E) = 0_F$ car f est linéaire, donc $0_E \in \ker(f)$.
 - Soient $x, y \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = 0_F$. Donc $\lambda x + y \in \ker(f)$.
 Ainsi $\ker(f)$ est un sev de E .
- (c)
 - \Rightarrow : supposons que f est injective. Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0_F = f(0_E)$, et comme f est injective, $x = 0_E$. Donc $\ker(f) \subset \{0_E\}$. Comme $\ker(f)$ est un sev de E , $\{0_E\} \subset \ker(f)$. Donc $\ker(f) = \{0_E\}$.
 - \Leftarrow : supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x) - f(y) = 0_F$ donc $f(x - y) = 0_F$ et $x - y \in \ker(f) = \{0_E\}$. Donc $x - y = 0_E$ et $x = y$. Ainsi, f est injective.
- (d)
 - \subset : soit $y \in f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))$. Il existe $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ tel que $x = f(y)$. Donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Ainsi, $y = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
 - \supset : soit $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$. Donc $y = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \in f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_n))$.

3.
 - Soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$. Donc $g(x) \in \ker(f)$. Ainsi $\ker(f)$ est stable par g .
 - Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im}(f)$. Ainsi, $\text{Im}(f)$ est stable par g .

4. (a)
 - Soit $y \in \text{Im}(f - \text{id}_E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (f - \text{id}_E)(x) = f(x) - x$. Donc $(f - 2\text{id}_E)(y) = f(y) - 2y = f(f(x) - x) - 2(f(x) - x) = f^2(x) - 3f(x) + 2x = 0_E$. Donc $y \in \ker(f - 2\text{id}_E)$.
 - Soit $y \in \text{Im}(f - 2\text{id}_E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (f - 2\text{id}_E)(x) = f(x) - 2x$. Donc $(f - \text{id}_E)(y) = f(y) - y = f(f(x) - 2x) - (f(x) - 2x) = f^2(x) - 3f(x) + 2x = 0_E$. Donc $y \in \ker(f - \text{id}_E)$.

- (b) Soit $x \in E$.
 - Analyse : soient $x_1 \in \ker(f - \text{id}_E)$ et $x_2 \in \ker(f - 2\text{id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$.
 En particulier, $f(x_1) - x_1 = 0_E$ donc $f(x_1) = x_1$ et de même $f(x_2) = 2x_2$. Donc $f(x) = x_1 + 2x_2$.
 D'où $f(x) - x = x_2$ et $x_1 = x - x_2 = 2x - f(x)$.
 - Synthèse : posons $x_1 = 2x - f(x)$ et $x_2 = f(x) - x$. On a bien $x_1 + x_2 = x$. De plus, $x_1 = (f - 2\text{id}_E)(-x) \in \text{Im}(f - 2\text{id}_E) \subset \ker(f - \text{id}_E)$ et $x_2 = (f - \text{id}_E)(x) \in \text{Im}(f - \text{id}_E) \subset \ker(f - 2\text{id}_E)$.

Ainsi, $\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in \ker(f - \text{id}_E) \times \ker(f - 2\text{id}_E), x = x_1 + x_2$.
 Donc $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker(f - 2\text{id}_E)$.

5. (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

- (b) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ et $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.

6. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour tout $x \in [k, k+1], f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Par croissance de l'intégrale, $\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$ et donc $\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}}$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme l'inégalité de droite pour k allant de 1 à n et par relation de Chasles : $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Or

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1). \text{ Donc } \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On somme l'inégalité de gauche pour k allant de 1 à $n-1$: $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n)$. Or, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)}$.

(c) Comme $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, par minoration $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

De plus, $1 + \ln(n) \sim \ln(n)$ et $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n) \sim \ln(n)$. Par encadrement, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin(t) \leq 1$, donc $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$. Donc la suite (I_n) est décroissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \sin^n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(t)) \sin^n(t) dt \\ &= I_n - \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \sin^n(t) dt \end{aligned}$$

On fait une IPP en posant $u(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = \cos(t) \sin^n(t)$, de sorte que

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= I_n - \frac{1}{n+1} [\cos(t) \sin^{n+1}(t)]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t) dt \\ &= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2} \end{aligned}$$

donc $\frac{n+2}{n+1} I_{n+2} = I_n$ et $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

On remarque alors que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ donc $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$. La suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante.

Or, $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Or $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \sim \frac{n}{n+2} I_n = I_n$. Par encadrement, $I_{n+1} \sim I_n$.

Ainsi, $\frac{\pi}{2} = (n+1)I_{n+1}I_n \sim (n+1)I_n^2$, donc $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8. (a) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} et $a \in I$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. Alors :

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $I = [0, +\infty[$ et soit $a = 0 \in I$. Pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$, donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ et $f^{(0)}(0) = \ln(1+0) = 0$. De plus, pour tout $t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leq n!$.

D'après Taylor-Lagrange, on obtient :

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n}$$

On applique en $x = 1 : |\ln(2) - u_n| \leq \frac{1}{n}$.

Ainsi, par encadrement, $u_n \rightarrow \ln(2)$.

9. Posons $f : x \mapsto \frac{1}{1+3x}$ qui est une fonction continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\int_0^1 f(t) dt.$$

$$\text{Or, } \int_0^1 \frac{1}{1+3t} dt = \frac{1}{3} [\ln(1+3t)]_0^1 = \frac{\ln(4)}{3}.$$

$$\text{Donc } u_n \rightarrow \frac{\ln(4)}{3}.$$

10. (a) La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} est $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(\text{id}_E)$: ce sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{C} écrits dans la base \mathcal{B} .

(b) Soient E et F deux \mathbb{K} -ev avec $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F$ deux bases de F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(f) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}$

11. (a) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \text{id}_E)X = 0 \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$, donc $F = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et comme $e_1 + e_2 + e_3 \neq 0_E$, une base de F est $(e_1 + e_2 + e_3)$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - 2\text{id}_E)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3}y \\ z = -\frac{2}{3}y \end{cases}$, donc $F = \text{Vect}(\frac{4}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3)$ et comme $\frac{4}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3 \neq 0_E$, une base de F est $(\frac{4}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3)$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + 4\text{id}_E)X = 0 \iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ z = -\frac{2}{3}y \end{cases}$, donc $F = \text{Vect}(-\frac{2}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3)$ et comme $-\frac{2}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3 \neq 0_E$, une base de F est $(-\frac{2}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3)$.

(b) On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = \frac{4}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3$ et $f_3 = -\frac{2}{3}e_1 + e_2 - \frac{2}{3}e_3$.

On vérifie que la famille $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est libre et comme elle est de cardinal $3 = \dim(E)$, c'est une base de E .

D'après la question précédente, $f(f_1) = f_1$, $f(f_2) = 2f_2$ et $f(f_3) = -4f_3$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{diag}(1, 2, -4)$.

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} est $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et on trouve son inverse avec le pivot de Gauss : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix}$.

Enfin, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P$.

12. (a) Soit X une variable aléatoire, $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$. Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.
- (b) Soit X une variable aléatoire, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. Alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- (c) Si X_1, \dots, X_n sont n variables mutuellement indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .
13. (a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+ et $a > 0$. Alors $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.
- (b) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. Alors $V(X) = E((X - E(X))^2)$.
- (c) Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
En effet, $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ car l'espérance est linéaire.
- (d) Soit X une variable aléatoire réelle et $\varepsilon > 0$: $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.
14. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs réelles : $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.
- (b) $\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V) = E(X^2 - Y^2) - (E(X) + E(Y))(E(X) - E(Y)) = E(X^2) - E(Y^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 = V(X) - V(Y)$ et $\boxed{\text{Cov}(U, V) = 0}$ car $X \sim Y$.
 $P(U = 2, V = 1) = 0$, $P(U = 2) = P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2 \neq 0$ par indépendance, $P(V = 1) = P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0) = p(1 - p) \neq 0$ de même. Donc $P(U = 2, V = 1) \neq P(U = 2)P(V = 1)$ et $\boxed{U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes.}}$
15. (a) X_1 et X_2 comptent le nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ suivent une loi binomiale de paramètres } (n, 1/2).}$
- (b) On utilise le SCE ($X_1 = k$) $_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et la formule des probabilités totales : $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^n P(X_1 = X_2, X_1 = k) = \sum_{k=0}^n P(X_1 = k, X_2 = k) = \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = k)$ par indépendance.
Donc $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{2^{2n-2k}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$, donc $\boxed{P(X_1 = X_2) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}}$ d'après l'indication.
- (c) Par linéarité de l'espérance, $\boxed{E(Y) = E(X_1) - E(X_2) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} = 0.}$
Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, X_1 et $-X_2$ aussi. Donc $V(Y) = V(X_1) + V(-X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ et $\boxed{V(Y) = \frac{n}{2}.}$
16. (a) Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum a^n$ converge ssi $|a| < 1$. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$.

(b) Soit $a \in \mathbb{K}$. La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$.

17. Supposons que $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, de sorte que la suite (S_n) converge. Donc $u_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et pourtant $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

18. Posons $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$. Comme $\alpha > 1$, f est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout $k \geq 2$ et pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t)$ d'où $f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ par croissance de l'intégrale.

En sommant avec Chasles, pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n = -\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha-1}$ car $\alpha > 1$.

Ainsi, la suite des sommes partielles de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (qui est une SATP) est majorée, elle converge donc.

19. (a) $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$ et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par équivalence de SATP, $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

(b) $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 1 \neq 0$, donc la série diverge grossièrement.

(c) $\left| \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2} \right| \sim \frac{|\cos(n)|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$. Par comparaison de SATP, $\sum \frac{|\cos(n)|}{n^{3/2}}$ converge.

Par équivalence de SATP, $\sum \left| \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2} \right|$ converge donc $\sum \frac{\sqrt{n+1} \cos(n)}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

20. • Symétrie : soit $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b g(t)f(t)dt = \langle g, f \rangle$.
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

• Bilinéarité : soit $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda f + g, h \rangle = \int_a^b (\lambda f + g)(t)h(t)dt = \int_a^b (\lambda f(t)h(t) + g(t)h(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)h(t)dt + \int_a^b g(t)h(t)dt = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ par linéarité de l'intégrale.
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et par symétrie, bilinéaire.

• Positivité : soit $f \in E$, $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale.

• Définie positivité : soit $f \in E$. Supposons que $\langle f, f \rangle = 0$. Alors $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$, et comme f^2 est continue et positive sur $[a, b]$, par stricte positivité de l'intégrale, $\forall t \in [a, b], f(t)^2 = 0$, donc $f = 0_E$.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

21. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel de norme associée $\| \cdot \|$. Soit $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Si $y = 0_E$, alors l'inégalité est vérifiée.

Sinon, posons $P : t \mapsto \|x + ty\|^2$ définie sur \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$ et $P(t) = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2$. Donc P est une fonction polynomiale du second degré qui s'annule au maximum une fois sur \mathbb{R} : son discriminant est négatif ou nul.

Ainsi, $(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$ et $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

Par croissance de la racine carrée : $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.