Devoir Surveillé 5

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Douze questions indépendantes).

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. (a) Rappeler la définition de majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$.
   (b) Rappeler la définition de minimum d'une partie B de $\mathbb{R}$.
   (c) Donner la définition de borne supérieure d'une partie C de $\mathbb{R}$.
   (d) Énoncer la propriété de la borne supérieure.
3. Énoncer le théorème de la division euclidienne.
4. Déterminer le PGCD de 247 et 285.
5. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z) \end{array}$. Montrer que f est surjective.
6. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, y, y-x) \end{array}$. Montrer que f est injective.
7. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.
   (a) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Rappeler la définition de $f(A)$.
   (b) Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (c) Donner un exemple d'application f et de parties $A, B \in \mathscr{P}(E)$ telles que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
   (a) Rappeler la définition de f est surjective.
   (b) On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
9. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
10. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
11. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
12. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 4u_n$.

Exercice 2 (Deux droites).
Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(3,4)$ et $(7,15)$. On note D la droite (AB).

1. Déterminer une équation de la droite D.
2. Soit $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x = \dfrac{2}{t-2} \text{ et } y = \dfrac{-17t+56}{4t-8}\right\}$.
   Montrer que $C \subset D$.

Exercice 3 (Une étude de suite).
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x-1}$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.
On définit, si c'est possible, la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Déterminer $f(]-\infty, 0])$, $f\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right[\right)$, $f\left(\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]\right)$, et $f([1, +\infty[)$
   (e) Dresser le tableau de signes de g.
2. **On suppose dans cette question que** $u_0 \geq 1$
   (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).
   (c) Bonus : Étudier la convergence de (u_n).
3. **On suppose dans cette question que** $u_0 \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$**.**
   (a) Prouver que la suite (u_n) est bien définie.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 4 (On ne dépasse pas les bornes).
Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $D = \{|x-y|,\ \text{avec } x, y \in A\}$.

1. Montrer que D admet une borne inférieure et une borne supérieure.
2. Déterminer $\inf(D)$.
3. Montrer que $\sup(D) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 5 (Un nombre premier).
Soit p un nombre premier tel que $11p + 1$ est le carré d'un entier.

1. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $11p = (k-1)(k+1)$.
2. En considérant la factorisation en produit de facteurs premiers de $k-1$ et de $k+1$, déterminer les valeurs possibles pour p.

Exercice 6 (Une application entre applications).
Soient E, F et G trois ensembles non vides. Soit $u : F \to G$ une application.
On pose : $\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E,F) & \to & \mathscr{F}(E,G) \\ f & \mapsto & u \circ f \end{array}$, c'est-à-dire que : $\forall x \in E$, $\phi(f)(x) = u \circ f(x)$.
On rappelle que deux applications $f, g \in \mathscr{F}(E,F)$ sont égales si et seulement si $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.

1. **Dans cette question uniquement**, on prend $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}_+^*$ et $G = \mathbb{R}$.
   On pose $u : x \mapsto \ln(x)$.
   (a) On pose $g \in \mathscr{F}(E,F)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^x + 2$.
   Déterminer la fonction $\phi(g)$.
   (b) Prouver que ϕ est bijective.
2. Montrer que ϕ est injective si et seulement si u est injective.
3. Montrer que ϕ est surjective si et seulement si u est surjective.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit surjective et dans ce cas, exhiber sa réciproque.

Correction du Devoir Surveillé 5

Correction de l'exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Si p et q sont pairs, on peut simplifier la fraction jusqu'à obtenir $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ et a et b ne sont pas tous les deux pairs.
   Alors $2 = \frac{a^2}{b^2}$, donc $a^2 = 2b^2$ et a^2 est pair. Puis a est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$. Donc $4k^2 = 2b^2$ d'où $b^2 = 2k^2$ et b^2 est pair, donc b est pair. Ainsi, a et b sont pairs, ce qui est une contradiction.
   Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.}$

2. (a) Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de A si $\boxed{\forall x \in A, x \leq M.}$
   (b) Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est le minimum de B si $\boxed{m \in B \text{ et } \forall x \in B, x \geq m.}$
   (c) Si elle existe, $\boxed{\text{la borne supérieure de } C \text{ est le plus petit des majorants de } C.}$
   (d) $\boxed{\text{Toute partie non vide et majorée de } \mathbb{R} \text{ admet une borne supérieure.}}$

3. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

4. $\mathrm{PGCD}(285, 247) = \mathrm{PGCD}(247, 38) = \mathrm{PGCD}(38, 19) = \mathrm{PGCD}(19, 0)$, donc $\boxed{\mathrm{PGCD}(285, 247) = 19.}$

5. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout $f(x, y, z) = (u, v) \iff \begin{cases} 2x = u \\ y + z = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u/2 \\ y = v - z \end{cases}$. On peut prendre $z = 0$ et $(u/2, v, 0)$ est un antécédent de (u, v) par f. Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ admettent au moins un antécédent par f : $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

6. Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(x, y) = f(x', y')$. Alors $\begin{cases} 2x + y = 2x' + y' \\ y = y' \\ y - x = y' - x' \end{cases}$, donc $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, $(x, y) = (x', y')$: $\boxed{f \text{ est injective.}}$

7. (a) $\boxed{f(A) = \{y \in E \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.}$
   (b) Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y \in f(A)$ et comme $x \in B$, $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).}$
   (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2$. On prend $A = [-2, -1]$ et $B = [1, 2]$, de sorte que $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, et $f(A) \cap f(B) = [1, 4]$.

8. (a) f est surjective ssi $\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y.}$
   (b) Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $z = g(f(x))$.
   Ainsi, $\boxed{g \circ f \text{ est surjective.}}$

9. Soit $P \in \mathbb{R}$ tel que $P = 3P - 4$. C'est-à-dire, $P = 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - P = 3(u_n - P)$, donc la suite $(u_n - P)$ est géométrique de raison 3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - P = (u_0 - P)3^n$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^{n+1} + 2.}$

10. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 3 = 0$ dont les solutions sont -1 et 3. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(-1)^n + B3^n$. Puis, $u_0 = 1 = A + B$ et $u_1 = 0 = -A + 3B$, ce qui donne $B = \frac{1}{4}$ et $A = \frac{3}{4}$.
    Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{3^n}{4}.}$

11. L'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$ dont la seule solution est 3. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A + Bn)3^n$. Puis, $u_0 = 1 = A$ et $u_1 = 0 = 3 + 3B$, ce qui donne $B = -1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 - n)3^n.}$

12. L'équation caractéristique est $r^2-2r+4=0$ dont les solutions sont $1\pm i\sqrt{3}=2\,\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Donc il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2^n\left(A\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)+B\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)$. Puis, $u_0=1=A$ et $u_1=0=2+B\sqrt{3}$, ce qui donne $B=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)}$.

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de D vaut $\frac{11}{4}$. Donc il existe $b\in\mathbb{R}$ tel que $y=\frac{11}{4}x+b$ est une équation de D. Comme $A\in B$, $4=\frac{33}{4}+b$ donc $b=-\frac{17}{4}$. Ainsi, une équation de D est $\boxed{y=\frac{11}{4}x-\frac{17}{4}}$.
2. Soit $(x,y)\in C$. Il existe $t\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ tel que $x=\frac{2}{t-2}$ et $y=\frac{-17t+56}{4t-8}$. Alors $\frac{11}{4}x-\frac{17}{4}=\frac{22}{4t-8)}-\frac{17(t-2)}{4t-8)}=\frac{-17t+56}{4t-8}=y$. Donc $(x,y)\in D$. Ainsi, $\boxed{C\subset D.}$

Correction de l'exercice 3 :

1. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction f est définie en x ssi $2x-1\neq 0$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}}$.

   (b) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$:

$$\begin{aligned} f(x)=x &\iff \frac{x^2}{2x-1}-x=0\\ &\iff \frac{-x^2+x}{2x-1}=0\\ &\iff -x^2+x=0\end{aligned}$$

   Les solutions sont donc $\boxed{0 \text{ et } 1}$.

   (c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

   (d) D'après le tableau de variations,

$$\boxed{f(]-\infty,0])=]-\infty,0],\ f\left(\left[0,\frac{1}{2}\right[\right)=]-\infty,0],\ f\left(\left]\frac{1}{2},1\right]\right)=[1,+\infty[,\ f([1,+\infty[)=[1,+\infty[.}$$

   (e) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $g(x)=\frac{x(1-x)}{2x-1}$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

2. (a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n est bien défini et $u_n \geq 1$.
   - Initialisation : par définition, $u_0 \geq 1$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est bien défini et $u_n \geq 1$. Alors $u_n \neq \frac{1}{2}$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} \in f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$. Ainsi, $u_{n+1} \geq 1$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 1.}$

   (b) Comme g est négative sur $[1,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 1$. Puis, comme f est continue sur $[1,+\infty[$, $f(u_n) \to f(\ell)$ et $u_{n+1} \to \ell$. Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Mais comme $\ell \geq 1$, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1.}$

3. (a) L'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ n'est pas stable par f. Mais, $u_1 = f(u_0) \in [1,+\infty[$. Donc de même que dans la question 2a,
   $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 1.}$

   (b) On a $u_0 \leq u_1$, mais de même que dans la question 2b, $\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante.}}$

Correction de l'exercice 4 :

1. Déjà, comme A est non vide il existe $x \in A$ et $0 = |x - x| \in D$. Donc $\underline{D \text{ est non vide}}$.
   Puis, pour tout $x, y \in A$, $|x - y| \geq 0$, donc $\underline{D \text{ est minorée par } 0}$.
   Enfin, comme A est non vide et bornée, elle admet une borne supérieure et inférieure : pour tout $x, y \in A$, $\inf(A) \leq x \leq \sup(A)$ et $-\sup(A) \leq -y \leq -\inf(A)$, donc $\inf(A) - \sup(A) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$ et $-(\sup(A) - \inf(A)) \leq x - y \leq \sup(A) - \inf(A)$. D'où $\forall x, y \in A$, $|x - y| \leq \sup(A) - \inf(A)$.
   Ainsi, $\underline{D \text{ est majorée par } \sup(A) - \inf(A)}$.
   Ainsi, $\boxed{D \text{ admet une borne inférieure et une borne supérieure.}}$
2. Comme 0 minore D et $0 \in D$, 0 est le minimum de D. Donc $\boxed{\inf(D) = \min(D) = 0.}$
3. On a montré dans la question 1 que D est majorée par $\sup(A) - \inf(A)$. Soit $\varepsilon > 0$:
   - si $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < 0$, alors $0 \in D$ et $0 > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$;
   - si $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon \geq 0$, comme $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ ne majore pas A et $\inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ ne minore pas A, il existe $x, y \in A$ tels que $x > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $y < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $x - y > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon \geq 0$, donc $|x - y| = x - y > \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$.

   Dans les deux cas, $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$ ne majore pas D, donc $\boxed{\sup(D) = \sup(A) - \inf(A).}$

Correction de l'exercice 5 :

1. Comme $11p+1$ est le carré d'un entier, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $11p+1 = k^2$, donc $11p = k^2-1$ et $\boxed{11p = (k-1)(k+1).}$
2. Comme 11 et p sont premiers, $(k-1)(k+1) = 11p$ est la décomposition en facteurs premiers de $(k-1)(k+1)$. De plus, notons $k-1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ et $k+1 = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ les décompositions en facteurs premiers de $k-1$ et $k+1$. Alors $(k-1)(k+1) = p_1^{\alpha_1+\beta_1} \cdots p_r^{\alpha_r+\beta_r}$ est aussi la décomposition en facteurs premiers de $(k-1)(k+1)$. Par unicité de la décomposition, on a les cas suivants :
   - si $p = 11$: $r = 1$ et $p_1 = 11$ et $\alpha_1 + \beta_1 = 2$, donc comme $k+1 > k+1$, $k+1 = 11^2$ et $k+1 = 1$ ce qui n'est pas possible ;

- si $p < 11$: $r = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = 11$ et comme $k-1 < k+1$, $k-1 = p$ et $k+1 = 11$, donc $p = 9$ ce qui n'est pas possible;
- si $p > 11$: $r = 2$, $p_1 = 11$, $p_2 = p$ et comme $k-1 < k+1$, $k-1 = 11$ et $k+1 = p$, donc $p = 13$.

Puis, $11 \times 13 + 1 = (12)^2$. Ainsi,le seul nombre premier qui convient est $\boxed{13}$.

Correction de l'exercice 6 :

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\phi(g)(x) = u \circ g(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 2).}$

   (b)
   - Soient $f, g \in \mathscr{F}(E,F)$. Supposons que $\phi(f) = \phi(g)$. Alors pour tout $x \in E$, $\phi(f)(x) = \phi(g)(x)$ donc $\ln(f(x)) = \ln(g(x))$ donc $g(x) = f(x)$. Ainsi, $f = g$ et ϕ est injective.
   - Soit $h \in \mathscr{F}(E,G)$. Posons $f : x \mapsto \mathrm{e}^{h(x)}$. On a bien $f \in \mathscr{F}(E,F)$ car l'exponentielle est toujours strictement positive. De plus, pour tout $x \in E$, $\phi(f)(x) = \ln(\mathrm{e}^{h(x)}) = h(x)$, donc $\phi(f) = h$. Ainsi, ϕ est surjective.

   Donc $\boxed{\phi \text{ est bijective.}}$

2.
   - $\Rightarrow$: supposons que ϕ est injective. Soient $a, b \in F$. Supposons que $u(a) = u(b)$. Posons $f : x \mapsto a$ et $g : x \mapsto b$. Alors pour tout $x \in E$, $\phi(f)(x) = u(a) = u(b) = \phi(g)(x)$. Donc $\phi(f) = \phi(g)$ et $f = g$ par injectivité de ϕ. Donc $\forall x \in E$, $f(x) = a = b = g(x)$. Ainsi, u est injective.
   - $\Leftarrow$: Supposons que u est injective. Soient $f, g \in \mathscr{F}(E,F)$. Supposons que $\phi(f) = \phi(g)$. Alors pour tout $x \in E$, $u(f(x)) = u(g(x))$, donc $f(x) = g(x)$ par injectivité de u. Ainsi, $f = g$ et ϕ est injective.

   d'où $\boxed{u \text{ est injective ssi } \phi \text{ est injective.}}$

3.
   - $\Rightarrow$: supposons que ϕ est surjective. Soit $y \in G$. Posons $h : x \mapsto y \in \mathscr{F}(E,G)$. Comme ϕ est surjective, il existe $f \in \mathscr{F}(E,F)$ telle que $\phi(f) = h$. Donc pour tout $x \in E$, $u(f(x)) = h(x) = y$. En particulier, y admet au moins un antécédent par u et u est surjective.
   - $\Leftarrow$: supposons que u est surjective. Soit $h \in \mathscr{F}(E,G)$. On cherche $f : E \to F$ telle que $\phi(f) = h$, c'est-à-dire pour tout $x \in E$, $u(f(x)) = h(x)$. Pour tout $x \in E$, on pose $y = h(x)$ et comme u est surjective, il existe $z \in F$ tel que $u(z) = y$ et on pose $f(x) = z$. On obtient alors $f \in \mathscr{F}(E,F)$ telle que $u \circ f = h$ donc $\phi(f) = h$, et ϕ est surjective.

   Ainsi, $\boxed{u \text{ est surjective ssi } \phi \text{ est surjective.}}$

4. D'après les deux questions précédentes, $\boxed{\phi \text{ est bijective ssi } u \text{ est bijective.}}$

   Dans ce cas, on pose $\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E,G) & \to & \mathscr{F}(E,F) \\ h & \mapsto & u^{-1} \circ h \end{array}$, et on remarque que pour tout $f \in \mathscr{F}(E,F)$, $\psi \circ \phi(f) = u^{-1} \circ u \circ f = f$ et pour tout $h \in \mathscr{F}(E,G)$, $\phi \circ \psi(f) = u \circ u^{-1} \circ h = h$. Donc $\boxed{\psi = \phi^{-1}.}$