Devoir Surveillé de Cours 5

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Dix-neuf questions indépendantes).

1. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Donner la définition de $A \subset B$ et sa négation.
3. (a) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. Donner la définition de $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$.

   (b) Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1]$.
4. Soient $a < b$ deux réels et $A = \{ta + (1-t)b, \text{ avec } t \in [0,1]\}$. Montrer que $[a,b] = A$.
5. Soit E un ensemble. Montrer par contraposée que : $\forall A, B \in \mathscr{P}(E)$, $(A\cap B = A\cup B) \Rightarrow A = B$.
6. (a) Rappeler la définition de majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$.

   (b) Rappeler la définition de minimum d'une partie B de $\mathbb{R}$.

   (c) Donner la définition de borne supérieure d'une partie C de $\mathbb{R}$.

   (d) Énoncer la propriété de la borne supérieure.

   (e) Soit $A, B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ non vides et majorées. On pose $A + B = \{a + b, \text{ avec } a \in A, b \in B\}$.
   Montrer que $A+B$ est majorée et que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
7. Énoncer le théorème de la division euclidienne.
8. Déterminer le PGCD de 247 et 285.
9. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x, y+z) \end{array}$. Montrer que f est surjective.
10. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+y, y, y-x) \end{array}$. Montrer que f est injective.
11. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.

    (a) Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Rappeler la définition de $f(A)$.

    (b) Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$.

    (c) Donner un exemple d'application f et de parties $A, B \in \mathscr{P}(E)$ telles que $f(A\cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
12. Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.

    (a) Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Rappeler la définition de $f^{<-1>}(B)$.

    (b) Soient $A, B \in \mathscr{P}(F)$. Montrer que $f^{<-1>}(A\cup B) = f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B)$.
13. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

    (a) Rappeler la définition de f est injective.

    (b) On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
14. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

    (a) Rappeler la définition de f est surjective.

(b) On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.

15. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
16. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
17. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
18. Déterminer le terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 4u_n$.
19. (a) Rappeler la définition de suite décroissante.

    (b) Étudier la monotonie de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 2 (Une droite).
Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(3,4)$ et $(7,15)$. On note D la droite (AB).

1. Déterminer une équation de la droite D.
2. Soit $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, x = \dfrac{2}{t-2} \text{ et } y = \dfrac{-17t+56}{4t-8}\right\}$.
   Montrer que $C \subset D$.

Exercice 3 (Un peu d'arithmétique).

1. Décomposer 18 et 252 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire tous les entiers naturels x et y tels que $x \leq y$, $\text{PGCD}(x,y) = 18$ et $\text{PPCM}(x,y) = 252$.

Exercice 4 (Une application).
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x)$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer $f^{<-1>}(\{y\})$.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?
3. Déterminer deux intervalles I et J aussi grands que possibles tels que $f : I \to J$ est une bijection, en justifiant.

Exercice 5 (Une étude de suite).
Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.

1. (a) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.

   (b) Justifier que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution φ et déterminer l'expression de φ.

   (c) Dresser le tableau de signes de g.

   (d) Déterminer les variations de f : on placera φ dans le tableau.

   (e) Déterminer deux intervalles stables de f.
2. Soit $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \in [-1, \varphi]$.

   (b) Étudier la monotonie de (u_n).

   (c) Bonus : en déduire la convergence de la suite (u_n).

Correction du Devoir Surveillé de Cours 5

Correction de l'exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Si p et q sont pairs, on peut simplifier la fraction jusqu'à obtenir $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ et a et b ne sont pas tous les deux pairs.
Alors $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, donc $a^2 = 2b^2$ et a^2 est pair. Puis a est pair. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$. Donc $4k^2 = 2b^2$ d'où $b^2 = 2k^2$ et b^2 est pair, donc b est pair. Ainsi, a et b sont pairs, ce qui est une contradiction.
Ainsi, $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.}$
2. $\boxed{A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B.\ A \not\subset B \iff \exists x \in A \mid x \notin B.}$
3. (a) $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}, \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.}$

   (b) Notons $A = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$.

   - $\subset$: Soit $x \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, donc $0 < \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1$ et $x \in]0,1]$. Ainsi, $A \subset]0,1]$.
   - $\supset$: Soit $x \in]0,1]$. On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} \leq x \iff n \geq \dfrac{1}{x}$. Posons $n = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \geq \dfrac{1}{x}$, donc $\dfrac{1}{n} \leq x \leq 1$ et $x \in A$. Ainsi, $]0,1] \subset A$.

   Ainsi, $\boxed{\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1].}$
4.
   - $\subset$: soit $x \in [a,b]$. On cherche $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b \iff x - b = t(a-b)$. Comme $a \neq b$, on pose $t = \dfrac{x-b}{a-b}$. On a bien $x = ta + (1-t)b$. De plus, $a \leq x \leq b$, donc $a - b \leq x - b \leq 0$ et $0 \leq t \leq 1$ car $a - b < 0$. Ainsi, $[a,b] \subset A$.
   - Soit $x \in A$. Il existe $t \in [0,1]$ tel que $x = ta + (1-t)b = b + t(a-b)$. Or $0 \leq t \leq 1$, donc $a - b \leq t(a-b) \leq 0$ (car $a - b < 0$) et $a \leq b + t(a-b) \leq b$. Donc $x \in [a,b]$ et $A \subset [a,b]$.

   Ainsi, $\boxed{[a,b] = A.}$
5. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $A \neq B$.
   - Premier cas : il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$. Alors $x \notin A \cap B$ et $x \in A \cup B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.
   - Deuxième cas : il existe $x \in B$ tel que $x \notin A$. Alors $x \notin A \cap B$ et $x \in A \cup B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

   Dans les deux cas, $A \cap B \neq A \cup B$.
   Par contraposée $\boxed{\forall A, B \in \mathscr{P}(E), (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.}$
6. (a) Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant de A si $\boxed{\forall x \in A, x \leq M.}$

   (b) Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est le minimum de A si $\boxed{m \in A \text{ et } \forall x \in A, x \geq m.}$

   (c) Si elle existe, $\boxed{\text{la borne supérieure de } C \text{ est le plus petit des majorants de } C.}$

   (d) $\boxed{\text{Toute partie non vide et majorée de } \mathbb{R} \text{ admet une borne supérieure.}}$

(e) Pour tout $a \in A$, $a \leq \sup(A)$ et pour tout $b \in B$, $b \leq \sup(B)$. Donc pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a+b \leq \sup(A)+\sup(B)$. Ainsi, $\boxed{A+B \text{ est majorée.}}$ De plus, $A+B$ est non vide, donc admet une borne supérieure.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2}$ ne majore pas A, il existe $a \in A$ tel que $a > \sup(A) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe $b \in B$ tel que $b > \sup(B) - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $a+b > \sup(A)+\sup(B)-\varepsilon$: $\sup(A)+\sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$ donc $\boxed{\sup(A+B) = \sup(A)+\sup(B).}$

7. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.
8. $\text{PGCD}(285,247) = \text{PGCD}(247,38) = \text{PGCD}(38,19) = \text{PGCD}(19,0)$, donc $\boxed{\text{PGCD}(285,247) = 19.}$
9. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On résout $f(x,y,z) = (u,v) \iff \begin{cases} 2x = u \\ y+z = v \end{cases} \iff \begin{cases} x = u/2 \\ y = v - z \end{cases}$.
On peut prendre $z = 0$ et $(u/2, v, 0)$ est un antécédent de (u,v) par f. Tous les éléments de $\mathbb{R}^2$ admettent au moins un antécédent par f : $\boxed{f \text{ est surjective.}}$
10. Soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $f(x,y) = f(x',y')$. Alors $\begin{cases} 2x+y = 2x'+y' \\ y = y' \\ y-x = y'-x' \end{cases}$, donc $x = x'$ et $y = y'$. Ainsi, $(x,y) = (x',y')$: $\boxed{f \text{ est injective.}}$
11. (a) $\boxed{f(A) = \{y \in E \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.}$
    (b) Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y \in f(A)$ et comme $x \in B$, $y \in f(B)$. Ainsi, $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).}$
    (c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2$. On prend $A = [-2,-1]$ et $B = [1,2]$, de sorte que $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, et $f(A) \cap f(B) = [1,4]$.
12. (a) $\boxed{f^{<-1>}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.}$
    (b)
    - $\subset$: soit $x \in f^{<-1>}(A \cup B)$. Alors $f(x) \in A \cup B$, donc $f(x) \in A$ et $x \in f^{<-1>}(A)$ ou $f(x) \in B$ et $x \in f^{<-1>}(B)$. Dans les deux cas, $x \in f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B)$. Donc $f^{<-1>}(A \cup B) \subset f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B)$.
    - $\supset$: soit $x \in f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B)$. Alors soit $x \in f^{<-1>}(A)$ et $f(x) \in A$, donc $f(x) \in A \cup B$, soit $x \in f^{<-1>}(B)$ et $f(x) \in B$ donc $f(x) \in A \cup B$. Dans les deux cas, $x \in f^{<-1>}(A \cup B)$. Donc $f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B) \subset f^{<-1>}(A \cup B)$.

    Ainsi, $\boxed{f^{<-1>}(A \cup B) = f^{<-1>}(A) \cup f^{<-1>}(B).}$
13. (a) f est injective ssi : $\boxed{\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.}$
    (b) Soient $x, x' \in E$. Supposons que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors $f(x)$ et $f(x')$ ont même image par g. Comme g est injective, $fx) = f(x')$. Et comme f est injective, $x = x'$.
    Ainsi. $\boxed{g \circ f \text{ est injective.}}$
14. (a) f est surjective ssi $\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y.}$
    (b) Soit $z \in G$. Comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $z = g(f(x))$.
    Ainsi, $\boxed{g \circ f \text{ est surjective.}}$
15. Soit $P \in \mathbb{R}$ tel que $P = 3P - 4$. C'est-à-dire, $P = 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - P = 3(u_n - P)$, donc la suite $(u_n - P)$ est géométrique de raison 3. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - P = (u_0 - P)3^n$, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{n+1} + 2.}$

16. L'équation caractéristique est $r^2-2r-3=0$ dont les solutions sont -1 et 3. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A(-1)^n + B3^n$. Puis, $u_0 = 1 = A+B$ et $u_1 = 0 = -A+3B$, ce qui donne $B = \frac{1}{4}$ et $A = \frac{3}{4}$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{4}(-1)^n + \frac{3^n}{4}.}$
17. L'équation caractéristique est $r^2-6r+9=0$ dont la seule solution est 3. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A+Bn)3^n$. Puis, $u_0 = 1 = A$ et $u_1 = 0 = 3+3B$, ce qui donne $B = -1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1-n)3^n.}$
18. L'équation caractéristique est $r^2-2r+4=0$ dont les solutions sont $1 \pm i\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(A\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)$. Puis, $u_0 = 1 = A$ et $u_1 = 0 = 2 + B\sqrt{3}$, ce qui donne $B = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right).}$
19. (a) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite (u_n) est décroissante ssi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}.}$

    (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

Correction de l'exercice 2 :

1. La pente de D vaut $\frac{11}{4}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{11}{4}x + b$ est une équation de D. Comme $A \in B$, $4 = \frac{33}{4} + b$ donc $b = -\frac{17}{4}$. Ainsi, une équation de D est $\boxed{y = \frac{11}{4}x - \frac{17}{4}.}$
2. Soit $(x, y) \in C$. Il existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $x = \frac{2}{t-2}$ et $y = \frac{-17t+56}{4t-8}$. Alors $\frac{11}{4}x - \frac{17}{4} = \frac{22}{4t-8)} - \frac{17(t-2)}{4t-8)} = \frac{-17t+56}{4t-8} = y$. Donc $(x, y) \in D$. Ainsi, $\boxed{C \subset D.}$

Correction de l'exercice 3 :

1. $\boxed{18 = 2 \times 3^2 \text{ et } 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7.}$
2. Soit $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{PGCD}(x, y) = 18$ et $\mathrm{PPCM}(x, y) = 252$. Alors il existe $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{N}$ tels que $x = 2^a \times 3^b \times 7^c$ et $y = 2^{a'} \times 3^{b'} \times 7^{c'}$. De plus, $\min(a, a') = 1$ et $\max(a, a') = 2$, $\min(b, b') = 2 = \max(b, b')$ et $\min(c, c') = 0$ et $\max(c, c') = 1$. Donc $b = b' = 2$ et on étudie les quatre cas :
   - $(a, a', c, c') = (1, 2, 0, 1)$: $x = 2 \times 3^2 \times 7^0 = 18$ et $y = 2^2 \times 3^2 \times 7^1 = 252$, donc $x \leq y$ et cette solution convient.
   - $(a, a', c, c') = (2, 1, 0, 1)$: $x = 2^2 \times 3^2 \times 7^0 = 36$ et $y = 2^1 \times 3^2 \times 7^1 = 126$, donc $x \leq y$ et cette solution convient.
   - $(a, a', c, c') = (1, 2, 1, 0)$: $x = 2 \times 3^2 \times 7^1 = 126$ et $y = 2^2 \times 3^2 \times 7^0 = 36$, donc $x > y$ et cette solution ne convient pas.
   - $(a, a', c, c') = (2, 1, 1, 0)$: $x = 2^2 \times 3^2 \times 7^1 = 252$ et $y = 2^1 \times 3^2 \times 7^0 = 18$, donc $x > y$ et cette solution ne convient pas.

   Donc les seules solutions du problème sont $\boxed{(18, 252) \text{ et } (36, 126).}$

Correction de l'exercice 4 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in f^{<-1>}(\{y\}) \iff f(x) = y \iff x^2 - x + y = 0$. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = 1 - 4y$. Donc :
   - si $y > \frac{1}{4}$, l'équation n'a pas de solution et $\boxed{f^{<-1>}(\{y\}) = \emptyset.}$

- si $y = \dfrac{1}{4}$, l'équation n'a qu'une seule solution et $\boxed{f^{<-1>}(\{y\}) = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}.}$
- si $y < \dfrac{1}{4}$, l'équation a deux solutions et $\boxed{f^{<-1>}(\{y\}) = \left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y}}{2}\right\}.}$

2. D'après la question précédente, 0 a deux antécédents 0 et 1, donc $\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$
   De même, 1 n'a pas d'antécédent, donc $\boxed{f \text{ n'est pas surjective.}}$
3. La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 1/2]$ et strictement décroissante sur $[1/2, +\infty[$. Donc on pose $I =]-\infty, 1/2]$ et $J =]-\infty, 1/4]$. f est continue sur I, strictement croissante et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ et $f(1/2) = 1/4$. D'après le TBM, $\boxed{f \text{ est une bijection de } I \text{ sur } J.}$

Correction de l'exercice 5 :

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. f est définie en x ssi $x+1 \geq 0$ ssi $x \geq -1$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } [-1, +\infty[.}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$. f est dérivable en x ssi $x+1 > 0$ ssi $x > -1$. Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-1, +\infty[.}$
   Pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $\sqrt{x+1} = x \iff x \geq 0$ et $x^2 - x - 1 = 0 \iff \boxed{x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.}$
   (b) De même, g est définie sur $[-1, +\infty[$. D'après la question précédente, g s'annule seulement en φ. On a donc le tableau de signes suivant :

x	-1		φ		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

   (c) f est croissante sur $[-1, +\infty[$:

x	-1	φ	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$ φ $\nearrow$	$+\infty$

   (d) D'après le tableau précédent, $f([-1, \varphi]) \subset [-1, \varphi]$ et $f([\varphi, +\infty[) \subset [\varphi, +\infty[$.
   Donc $\boxed{[-1, \varphi] \text{ et } [\varphi, +\infty[\text{ sont stables par } f.}$
2. (a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : u_0 est bien défini et comme $\sqrt{5} \geq 1$, $\varphi \geq 1$, donc $u_0 \in [-1, \varphi]$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est bien défini et $u_n \in [-1, \varphi]$. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} \in f([-1, \varphi])$. Comme $[-1, \varphi]$ est stable par f, $u_{n+1} \in [-1, \varphi]$.

   D'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \in [-1, \varphi].}$
   (b) Comme g est positive sur $[-1, \varphi]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$
   (c) Comme (u_n) est croissante et majorée elle converge vers une limite $\ell \in [-1, \varphi]$. De plus, par continuité de f sur $[-1, +\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n) f(\ell)$ et $u_{n+1} \to \ell$. Par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \varphi.}$