

**Devoir Surveillé 4**

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.  
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.  
La calculatrice est interdite.*

**Exercice 1 (Neuf questions indépendantes).**

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. (a) Énoncer le théorème d'intégration par parties.  
(b) Calculer  $\int^x t \arctan(t) dt$ .
3. (a) Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$ .  
(b) Déterminer une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ .
4. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^\pi e^{2t} \sin(3t) dt$ .
5. Soit  $a$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $(H) : y' + a(t)y = 0$ .  
Rappeler l'ensemble des solutions de  $(H)$  et le démontrer.
6. Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $a \neq 0$  et  $(H) : ay'' + by' + cy = 0$ .  
Énoncer le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs réelles de  $(H)$ .
7. Soit  $\omega_0 > 0, Q > 0, T > 0$  et  $E_0 \in \mathbb{R}$ .  
(a) Résoudre l'équation différentielle  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = E_0 \times \left(1 - \frac{4t}{T}\right)$  en fonction du signe de  $\frac{1}{Q^2} - 4$ . On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.  
(b) Tracer l'allure d'une solution lorsque  $Q > \frac{1}{2}$ .
8. Résoudre les systèmes linéaires suivants, et interpréter les résultats en termes d'intersections de droites/plans :
 

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$	(b) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases}$	(c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$
--	---	---
9. Résoudre en fonction du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  le système  $\begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$ .

**Exercice 2 (Deux droites).**

Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathbb{R}^2$  de coordonnées respectives  $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$  et  $\left(3, \frac{1}{5}\right)$ . Soit  $d$  la droite d'équation  $3x + 4y = 7$ .

1. Déterminer une équation de la droite  $(AB)$ .
2. Déterminer l'intersection des droites  $(AB)$  et  $d$ .

**Exercice 3 (Une équation différentielle).**

1. Soit  $f : x \mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x - 1)(x + 3)^2}$ .  
Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\forall x \in ]-3, 1[, f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 3} + \frac{c}{(x + 3)^2}$ .
2. Soit  $(E) : y' + f(x)y = \frac{1}{(x - 1)^3(x + 3)^2 e^{\frac{1}{x+3}} \sqrt{9 - x^2}}$ .  
Résoudre  $(E)$  sur  $] -3, 1[$ .

**Exercice 4 (Un peu de logique).** On considère la propriété  $P$  :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq a \Rightarrow (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1).$$

1. (a) Écrire la contraposée de  $P$ .  
 (b) La contraposée de  $P$  est-elle vraie? Justifier.  
 (c)  $P$  est-elle vraie? Justifier.
2. Écrire la négation de  $P$ .
3. La propriété :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1) \Rightarrow ab \leq a$$

est-elle vraie? Justifier.

4. Aucun rapport : soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. En utilisant un raisonnement par analyse-synthèse, montrer qu'il existe un unique réel  $a$  et une unique fonction continue  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\int_0^1 g(t) dt = 0$  et  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = g(x) + a$ .

**Exercice 5 (Une équation différentielle).**

On cherche à trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f''(x) - f'(x)^2 = 1$$

On raisonne par analyse-synthèse.

1. Analyse : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)f''(x) - f'(x)^2 = 1$ .  
 (a) Montrer par l'absurde que  $f$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .  
 (b) Prouver que  $f$  est trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 (c) En déduire que  $\frac{f''}{f}$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .  
 On note  $K$  cette constante.  
 (d) Calculer  $K$  en fonction de  $f(0)$  et  $f'(0)$  et justifier que  $K > 0$ .  
 (e) Déterminer une expression de  $f$  en fonction de  $K$ .  
 (f) Prouver qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{ch}(\sqrt{K}x + a)$$

$$\text{ou bien } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{ch}(\sqrt{K}x + a)$$

2. Synthèse : à vous de jouer.

**Exercice 6 (Une étude de fonction).**

On considère la fonction  $G : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$ .

1. (a) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa dérivée.  
 (b) En déduire les variations de  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. En utilisant le changement de variable  $u = -t$ , montrer que  $G$  est impaire.
3. En utilisant le changement de variable  $u = \operatorname{sh}(t)$ , montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ .  
*On rappelle la formule  $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ .*
4. Prouver que  $G$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .
5. Justifier que :  $\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\operatorname{sh}(G^{-1}(t)) = \tan(t)$ .  
*On pourra noter  $x = G^{-1}(t)$  et utiliser la question 3.*
6. Justifier que  $G^{-1}$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  puis montrer que :  $\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $(G^{-1})'(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ .
7. Justifier que :  $\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $G^{-1}(t) = \int_0^t \frac{1}{\cos(x)} dx$ .
8. En utilisant le changement de variable  $u = \sin(x)$ , calculer  $G^{-1}(t)$  en fonction de  $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

**Correction du Devoir Surveillé 4**

**Correction de l'exercice 1 :**

1. Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $a \in I$ . La fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est la seule primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .
2. (a) Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$  :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

- (b) On fait une IPP en posant  $u(t) = \arctan(t)$ ,  $u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ,  $v(t) = \frac{t^2}{2}$  et  $v'(t) = t$  :

$$\begin{aligned} \int^x t \arctan(t) dt &= \left[ \frac{t^2}{2} \arctan(t) \right]^x - \frac{1}{2} \int^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

3. (a) On cherche  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ ,  $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ . Or  $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{(x+2)(x-2)}$ , donc on prend  $a+b=0$  et  $2a-2b=1$ , donc  $b = -\frac{1}{4}$  et  $a = \frac{1}{4}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \int^t \frac{1}{x^2-4} dx &= \frac{1}{4} \int^t \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int^t \frac{dx}{x+2} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} \ln(|t-2|) - \frac{1}{4} \ln(|t+2|) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

- (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4 \left( \left( \frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)$ , donc

$$\begin{aligned} \int^t \frac{1}{x^2+2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int^t \frac{\frac{1}{2}}{\left( \frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \arctan\left( \frac{t+1}{2} \right) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

4. On commence par calculer  $J = \int_0^\pi e^{2t} e^{3it} dt$ .

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi e^{(2+3i)t} dt \\ &= \frac{1}{2+3i} [e^{(2+3i)t}]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2+3i} (e^{2\pi+3i\pi} - 1) \\ &= \frac{2-3i}{13} (-e^{2\pi} - 1) \\ &= \frac{-2(e^{2\pi}+1) + 3i(e^{2\pi}+1)}{13}. \end{aligned}$$

Donc  $I = \text{Im}(J) = \frac{3(e^{2\pi}+1)}{13}$ .

5. Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . L'ensemble des solutions de (H) est  $\{t \mapsto K e^{-A(t)}, K \in \mathbb{R}\}$ .  
Soit  $y$  une fonction dérivable sur  $I$ .

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (H)} &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, e^{A(t)} y'(t) + a(t)e^{A(t)} y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, (e^A y)'(t) = 0 \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) e^{A(t)} = K \\ &\iff \boxed{\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = K e^{-A(t)}} \end{aligned}$$

6. Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- si  $\Delta > 0$ , on note  $r_1$  et  $r_2$  les solutions de  $ar^2 + br + c = 0$  et l'ensemble des solutions de (H) est  $\{x \mapsto A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}, A, B \in \mathbb{R}\}$ ;
- si  $\Delta = 0$ , on note  $r_0$  la solution de  $ar^2 + br + c = 0$  et l'ensemble des solutions de (H) est  $\{x \mapsto (A+Bx) e^{r_0 x}, A, B \in \mathbb{R}\}$ ;
- si  $\Delta < 0$ , on note  $\alpha \pm i\beta$  les solutions de  $ar^2 + br + c = 0$  et l'ensemble des solutions de (H) est  $\{x \mapsto e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), A, B \in \mathbb{R}\}$ .

7. (a) On va commencer par une solution particulière! On pose  $u_p : t \mapsto at + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \overline{u_p} \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad u_p''(t) + \frac{\omega_0}{Q} u_p'(t) + \omega_0^2 u_p(t) = E_0 \left(1 - \frac{4t}{T}\right) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\omega_0}{Q} a + \omega_0^2 (at + b) = E_0 - \frac{4E_0}{T} t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\omega_0^2 a + \frac{4E_0}{T}\right) t + \frac{\omega_0}{Q} a + \omega_0^2 b - E_0 = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\omega_0^2 a + \frac{4E_0}{T} = 0$  et  $a = -\frac{4E_0}{T\omega_0^2}$  puis  $\frac{\omega_0}{Q} a + \omega_0^2 b - E_0 = 0$ , donc  $b = \frac{E_0}{\omega_0^2} + \frac{4E_0}{QT\omega_0^3}$ . Une solution particulière est donc :  $u_p : t \mapsto -\frac{4E_0}{T\omega_0^2} t + \frac{E_0}{\omega_0^2} + \frac{4E_0}{QT\omega_0^3}$ .

L'équation caractéristique est :  $X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$  dont le discriminant est  $\omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$ .

- Si  $\frac{1}{Q^2} - 4 > 0$ , alors l'équation caractéristique a deux solutions réelles  $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$ . Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$u_H(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\frac{1}{Q^2} - 4 < 0$ , alors l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées :  $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$ . Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :

$$u_H(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \left( A \cos\left(\frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} t\right) + B \sin\left(\frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} t\right) \right) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

- Si  $\frac{1}{Q^2} = 4$ , alors l'équation caractéristique a une seule solution :  $r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}$ . Les solutions de l'équation homogène sont de la forme :  $u_H(t) = (A + Bt)e^{r_0 t}$ , avec  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Dans tous les cas, une solution de (E) est de la forme  $u = u_p + u_H$ .

- (b) Quand  $Q > \frac{1}{2}$ , la solution est la somme d'une fonction affine (la solution particulière) et d'un signal pseudo-périodique.

8. (a)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_2 - L_1} \\ \xrightarrow{L_3 - L_1} \end{array} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -y - 3z = -6 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_3 + L_2} \\ \xrightarrow{L_3 - L_2} \end{array} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ y - z = -2 \\ -4z = -8 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions du système est  $\{(-1, 0, 2)\}$ . Les trois plans se coupent en un point.

- (b)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_2 + L_1} \\ \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \end{array} \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ y + 6z = 7 \\ y + 6z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9 - 11z \\ y = 7 - 6z \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions du système est  $\{(9 - 11z, 7 - 6z, z), z \in \mathbb{R}\}$ . Les trois plans se coupent le long d'une droite.

- (c)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} x - y = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

donc le système est incompatible. Les deux droites sont parallèles.

- 9.

$$(S) : \begin{cases} x + my = m^2 \\ mx + y = m^2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - mL_1} \begin{cases} x + my = m^2 \\ (1 - m^2)y = m^2(1 - m) \end{cases}$$

- Si  $m = 1$ , (S)  $\iff x + y = 1$  donc l'ensemble des solutions est  $\{(1 - y, y), y \in \mathbb{R}\}$ ;
- si  $m = -1$ , (S)  $\iff \begin{cases} x - y = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$  et (S) est incompatible;
- si  $m \neq \pm 1$ , (S)  $\iff \begin{cases} x = \frac{m^2 - my}{1 + m} \\ y = \frac{m^2}{1 + m} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{m^2}{1 + m} \\ y = \frac{m^2}{1 + m} \end{cases}$ , donc l'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( \frac{m^2}{1 + m}, \frac{m^2}{1 + m} \right) \right\}$ .

**Correction de l'exercice 3 :**

1. Pour tout  $x \in ]-3, 1[$ ,  $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (6a+2b+c)x + 9a-3b-x}{(x-1)(x+3)^2}$ , donc il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 6a + 2b + c = 21 \\ 9a - 3b - c = 22 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_2 - 6L_1} \\ \xrightarrow{L_3 - 9L_1} \end{array} \begin{cases} a + b = 5 \\ -4b + c = -9 \\ -12b - c = -23 \end{cases} \begin{array}{l} \xrightarrow{L_3 + 3L_2} \\ \xrightarrow{L_3 - 3L_2} \end{array} \begin{cases} a + b = 5 \\ -4b + c = -9 \\ -4c = 4 \end{cases}$$

donc  $a = 3, b = 2, c = -1$ .

2. La fonction  $F : x \mapsto 3\ln(1-x) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3}$  est une primitive de  $f$  sur  $] -3, 1[$ . Donc l'ensemble des solutions de  $y' + f(x)y = 0$  sur  $] -3, 1[$  est  $\left\{ x \mapsto K \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2}, K \in \mathbb{R} \right\}$ .

On fait varier la constante : on prend  $s$  une fonction dérivable sur  $] -3, 1[$  et  $y_p : x \mapsto s(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2}$ . Pour tout  $x \in ] -3, 1[$ ,  $y_p'(x) = s'(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2} +$

$$s(x) \frac{(1-x)^3 e^{-\frac{1}{x+3}} - e^{-\frac{1}{x+3}} (-3(1-x)^2(x+3)^2 + 2(1-x)^3(x+3))}{(1-x)^6(x+3)^4} = s'(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2} + s(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}} (5x^2 + 21x + 22)}{(1-x)^4(x+3)^4}.$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in ]-3, 1[, s'(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2} + s(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}} (5x^2 + 21x + 22)}{(1-x)^4(x+3)^4} + s(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}} (5x^2 + 21x + 22)}{(1-x)^3(x-1)(x+3)^4} = \frac{(x-1)^3(x+3)^2 e^{-\frac{1}{x+3}}}{\sqrt{9-x^2}} \\ &\iff \forall x \in ]-3, 1[, s'(x) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2} = \frac{(x-1)^3(x+3)^2 e^{-\frac{1}{x+3}}}{\sqrt{9-x^2}} \\ &\iff \forall x \in ]-3, 1[, s'(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}. \end{aligned}$$

On pose donc  $s : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$  qui est dérivable sur  $] -3, 3[$ , et  $y_p : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2}$  est solution de  $(E)$ .

L'ensemble des solutions de  $(E)$  est  $\left\{ x \mapsto K \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2} + \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \frac{e^{-\frac{1}{x+3}}}{(1-x)^3(x+3)^2}, K \in \mathbb{R} \right\}$ .

**Correction de l'exercice 2 :**

- Le coefficient directeur de  $(AB)$  est  $\frac{\frac{1}{5} - 2}{3 - \frac{1}{4}} = -\frac{36}{55}$ . Donc il existe  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $y = -\frac{36}{55}x + b$  est une équation de  $(AB)$ . Or  $A \in (AB)$  donc  $2 = -\frac{36}{55} \cdot \frac{1}{4} + b$  et  $b = \frac{119}{55}$ .

Une équation de  $(AB)$  est  $y = -\frac{36}{55}x + \frac{119}{55}$ .

- Soit  $(x, y)$  un point de  $\mathbb{R}^2$  sur  $(AB)$  et sur  $d$  :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 36x + 55y = 119 \end{cases} \iff_{L_2 - L_2 - 12L_1} \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 7y = 35 \end{cases}$$

donc  $y = 5$  et  $x = -\frac{13}{3}$ . Les deux droites se coupent au point de coordonnées  $\left(-\frac{13}{3}, 5\right)$ .

**Correction de l'exercice 4 :**

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a > 0 \text{ et } b < 1) \Rightarrow ab > a$ .
  - Non, elle est fautive : on prend  $a = 1$  et  $b = -1$  et on a alors  $a > 0$  et  $b < 1$  mais  $ab < 1$ .
  - $P$  est aussi fautive car elle est équivalente à sa contraposée.
- $\exists a, b \in \mathbb{R} \mid ab \leq a \text{ et } (a > 0 \text{ et } b > 1)$ .
- Non, car on peut prendre  $a = -1$  et  $b = -1$ , on a donc  $a \leq 0$  ou  $b \geq 1$ , mais  $ab > a$ .
- Analyse : soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $a \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $\int_0^1 g(t)dt = 0$  et  $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + a$ . On intègre :  $\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 g(t)dt + \int_0^1 a dt = a$ . Puis pour tout  $x \in [0, 1], g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t)dt$ .
  - Synthèse : soit  $a = \int_0^1 f(t)dt$  et pour tout  $x \in [0, 1], g(x) = f(x) - a$ . La fonction  $g$  est continue par opérations et  $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + a$ . Enfin,  $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 a dt = 0$ .

Il existe donc une unique fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et un unique  $a \in \mathbb{R}$  tels que  $\int_0^1 g(t)dt$  et  $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + a$ .

**Correction de l'exercice 5 :**

- Supposons par l'absurde qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Alors  $-f'(x_0)^2 = 1$  et donc  $1 \leq 0$ , ce qui est absurde. Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ .
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{1 + f'(x)^2}{f(x)}$  et la fonction  $\frac{1 + f'(x)^2}{f}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par opérations car  $f$  et  $f'$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  ne s'annule pas. Donc  $f$  est trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - La fonction  $\frac{f''}{f}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par opérations, et  $\left(\frac{f''}{f}\right)' = \frac{f'''f - f''f'}{f^2}$ . D'autre part,  $0 = (ff'' - (f')^2)' = f'f'' + ff''' - 2f''f' = f'f''' - f'f''$ . Donc  $\left(\frac{f''}{f}\right)' = 0$  et la fonction  $\frac{f''}{f}$  est constante sur  $\mathbb{R}$ .
  - On a  $f(0)f''(0) - f'(0)^2 = 1$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{f''(x)}{f(x)} = K = \frac{f''(0)}{f(0)} = \frac{1 + f'(0)^2}{f(0)^2} > 0$ .
  - D'après la question 1c,  $f$  est solution de  $(E) : f'' - Kf = 0$ . L'équation caractéristique est  $r^2 - K = 0$  dont les racines sont  $\pm\sqrt{K}$  car  $K > 0$ . Ainsi, il existe  $A, B \in \mathbb{R}$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ae^{\sqrt{K}x} + Be^{-\sqrt{K}x}$ .
  - On remplace l'expression dans l'équation :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(x)f''(x) - (f'(x))^2 &= 1 \\ \text{donc } (Ae^{\sqrt{K}x} + Be^{-\sqrt{K}x})(AKe^{\sqrt{K}x} + BKe^{-\sqrt{K}x}) - (A\sqrt{K}e^{\sqrt{K}x} - B\sqrt{K}e^{-\sqrt{K}x})^2 &= 1 \\ \text{donc } 4ABK &= 1 \end{aligned}$$

En particulier,  $A \neq 0$  et  $B = \frac{1}{4AK}$ .

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ae^{\sqrt{K}x} + \frac{1}{4AK}e^{-\sqrt{K}x} = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{2A\sqrt{K}e^{\sqrt{K}x} + \frac{1}{2A\sqrt{K}}e^{-\sqrt{K}x}}{2}$ .

- Si  $A > 0$ , on pose  $a = \ln(2A\sqrt{K})$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{K}} \text{ch}(\sqrt{K}x + a)$ .
- Si  $A < 0$ , on pose  $a = \ln(-2A\sqrt{K})$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{\sqrt{K}} \text{ch}(\sqrt{K}x + a)$ .

2. Soit  $K \in ]0, +\infty[$  et  $a \in \mathbb{R}$ . On pose  $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{ch}(\sqrt{K}x + a)$  qui est bien dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$ . En remplaçant dans l'équation, on vérifie que  $f$  est bien solution. De même pour l'autre cas.

Ainsi, les solutions du problème sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{ch}(\sqrt{K}x + a)$  et  $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{ch}(\sqrt{K}x + a)$  avec  $K \in ]0, +\infty[$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

**Correction de l'exercice 6 :**

1. (a) La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par opérations (ch ne s'annule pas). D'après le TFA,  $G$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0. Donc

$$G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}.$$

- (b) Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}, G'(x) > 0$ ,  $G$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $u = -t$  de sorte que  $du = -dt : G(x) = \int_0^{-x} \frac{-1}{\operatorname{ch}(-t)} dt = -\int_0^{-x} \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt = -G(-x)$ .

Donc  $G$  est impaire.

3. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Posons  $u = \operatorname{sh}(t)$  de sorte que  $du = \operatorname{ch}(t)dt$  :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)} dt \\ &= \int_0^{\operatorname{sh}(x)} \frac{1}{1+u^2} du \\ &= [\arctan(u)]_0^{\operatorname{sh}(x)} \end{aligned}$$

donc  $G(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ .

4.
  - $G$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car dérivable) ;
  - $G$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  ;
  - $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}$  (question précédente).

D'après le TBM,  $G$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

5. Soit  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , on note  $x = G^{-1}(t) \in \mathbb{R}$ . D'après la question 3,  $G(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ , donc  $\tan(G(x)) = \operatorname{sh}(x)$  et  $\tan(t) = \operatorname{sh}(G^{-1}(t))$ .

6. Comme  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}, G'(x) \neq 0$ , d'après le TBM,  $G^{-1}$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

De plus, on dérive l'égalité de la question précédente :  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $1 + \tan^2(t) = (G^{-1})'(t) \operatorname{ch}(G^{-1}(t)) = (G^{-1})'(t) \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(G^{-1}(t))} = (G^{-1})'(t) \sqrt{1 + \tan^2(t)}$ . Or pour tout  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$  et  $\cos(t) > 0$ , donc  $\frac{1}{\cos^2(t)} = (G^{-1})'(t) \frac{1}{\cos(t)}$ .

Ainsi,  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $(G^{-1})'(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ .

7. Comme  $G(0) = 0$ , on a  $G^{-1}(0) = 0$  et d'après le TFA,  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $G^{-1}(t) - G^{-1}(0) = \int_0^t (G^{-1})'(x) dx$ .

Donc  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $G^{-1}(t) = \int_0^t \frac{1}{\cos(x)} dx$ .

8. Soit  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On pose  $u = \sin(x)$  de sorte que  $du = \cos(x)dx$  :

$$\begin{aligned} G^{-1}(t) &= \int_0^t \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx \\ &= \int_0^t \frac{\cos(x) dx}{1 - \sin^2(x)} \\ &= \int_0^{\sin(t)} \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \int_0^{\sin(t)} \frac{du}{(1-u)(1+u)} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{2} \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{1+u} du \\ &= \frac{1}{2} [-\ln|1-u|]_0^{\sin(t)} + \frac{1}{2} [\ln|1+u|]_0^{\sin(t)} \end{aligned}$$

Donc  $\forall t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $G^{-1}(t) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \sin(t)}{1 - \sin(t)} \right)$ .