

Devoir Surveillé de Cours 4

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Dix-sept questions indépendantes).

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $x \mapsto e^{ax}$ est dérivable sur \mathbb{R} et que sa dérivée est $x \mapsto a e^{ax}$.
3. (a) Énoncer le théorème d'intégration par parties.
(b) Calculer $\int^x t \arctan(t) dt$.
4. (a) Calculer $\int^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t}^3}$ en posant $u = \sqrt{t}$.
(b) Calculer $\int^x \frac{dt}{\sin(t)}$ en posant $u = \cos(t)$.
5. (a) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 4}$.
(b) Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.
6. Étudier la fonction $h : x \mapsto \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt$.
7. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi e^{2t} \sin(3t) dt$.
8. Soit a une fonction continue sur un intervalle I et $(H) : y' + a(t)y = 0$.
Rappeler l'ensemble des solutions de (H) et le démontrer.
9. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et $(H) : ay'' + by' + cy = 0$.
Énoncer le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (H) .
10. Résoudre l'équation différentielle $2y' - y = \sin(x)$.
11. Résoudre $y' - 2y = e^{2t}$ avec $y(0) = 1$.
12. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $W' + \frac{1}{2(x+i)} W = 0$.
13. Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y' + y = \arctan(t)$.
14. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + y = e^t \cos(2t)$.
15. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.
16. Résoudre les systèmes linéaires suivants, et interpréter les résultats en termes d'intersections de droites/plans :
 - (a)
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$
 - (b)
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases}$$
 - (c)
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$
17. Soit $f : x \mapsto \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$ définie sur $]1, +\infty[$.
 - (a) Déterminer trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$.
 - (b) En déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2 (Deux droites).

Soient A et B deux points de \mathbb{R}^2 de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ et $\left(3, \frac{1}{5}\right)$. Soit d la droite d'équation $3x + 4y = 7$.

1. Déterminer une équation de la droite (AB) .
2. Déterminer l'intersection des droites (AB) et d .

Exercice 3 (Un peu de logique). On considère la propriété P :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq a \Rightarrow (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1).$$

1. (a) Écrire la contraposée de P .
 (b) La contraposée de P est-elle vraie? Justifier.
 (c) P est-elle vraie? Justifier.
2. Écrire la négation de P .
3. La propriété :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a \leq 0 \text{ ou } b \geq 1) \Rightarrow ab \leq a$$

est-elle vraie? Justifier.

4. Aucun rapport : soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant un raisonnement par analyse-synthèse, montrer qu'il existe un unique réel a et une unique fonction continue $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $\int_0^1 g(t) dt = 0$ et $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = g(x) + a$.

Exercice 4 (Une équation différentielle).

On considère l'équation différentielle $(E) : y^{(3)} - y = 0$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable.

Pour la résoudre, on procède par analyse-synthèse.

1. Analyse : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable. On suppose que f solution de (E) et on pose $g = f'' + f' + f$.
 (a) Montrer que g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E') à déterminer.
 (b) Résoudre (E') et en déduire une expression de f .
2. Faire la synthèse.

Correction du Devoir Surveillé de Cours 4

Correction de l'exercice 1 :

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la seule primitive de f qui s'annule en a .
2. Posons $f : x \mapsto e^{ax}$ et notons $a = b + ic$ avec $b, c \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{(b+ic)x} \\ &= e^{bx} e^{icx} \\ &= e^{bx} \cos(cx) + i e^{bx} \sin(cx) \end{aligned}$$

Or, $x \mapsto e^{bx} \cos(cx)$ et $x \mapsto e^{bx} \sin(cx)$ sont dérivables sur \mathbb{R} par opérations. Donc f est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= b e^{bx} \cos(cx) - c e^{bx} \sin(cx) + i b e^{bx} \sin(cx) + i c e^{bx} \cos(cx) \\ &= e^{bx} (b(\cos(cx) + i \sin(cx)) + i c(\cos(cx) + i \sin(cx))) \\ &= e^{bx} a e^{icx} \end{aligned}$$

donc $f'(x) = a e^{ax}$.

3. (a) Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

- (b) On fait une IPP en posant $u(t) = \arctan(t)$, $u'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $v(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = t$:

$$\begin{aligned} \int^x t \arctan(t)dt &= \left[\frac{t^2}{2} \arctan(t) \right]^x - \frac{1}{2} \int^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int^x \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

4. (a) On pose $u = \sqrt{t}$ de sorte que $t = u^2$ donc $dt = 2udu$ et on fait attention aux bornes :

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} &= \int^{\sqrt{x}} \frac{2udu}{u + u^3} \\ &= 2 \int^{\sqrt{x}} \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \boxed{2 \arctan(\sqrt{x}) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

- (b) On pose $u = \cos(t)$ de sorte que $du = -\sin(t)dt$ donc

$$\begin{aligned} \int^x \frac{dt}{\sin(t)} &= - \int^{\cos(x)} \frac{-\sin(t)dt}{\sin^2(t)} \\ &= - \int^{\cos(x)} \frac{-\sin(t)dt}{1 - \cos^2(t)} \\ &= - \int^{\cos(x)} \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \int^{\cos(x)} \frac{du}{(u-1)(u+1)} \\ &= \frac{1}{2} \int^{\cos(x)} \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(|\cos(x)-1|) - \frac{1}{2} \ln(|\cos(x)+1|) + C \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

5. (a) On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, $\frac{1}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$. Or $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x + 2a - 2b}{(x-2)(x+2)}$, donc on prend $a+b=0$ et $2a-2b=1$, donc $b = -\frac{1}{4}$ et $a = \frac{1}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int^t \frac{1}{x^2-4} dx &= \frac{1}{4} \int^t \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int^t \frac{dx}{x+2} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} \ln(|t-2|) - \frac{1}{4} \ln(|t+2|) + C, C \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)$, donc

$$\int^t \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int^t \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{t+1}{2} \right) + C, C \in \mathbb{R}$$

6. Posons $f : x \mapsto \arccos(\sqrt{x})$ et $g : x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$. Comme arccos et arcsin sont définies sur $[-1, 1]$, f et g sont définies sur $[0, 1]$. Par opérations, elles sont continues sur $[0, 1]$.
Notons F et G les primitives de f et g sur $[0, 1]$ qui s'annulent en 0 (TFA). Alors $h : x \mapsto F(\cos^2(x)) + G(\sin^2(x))$ et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x), \sin^2(x) \in [0, 1]$, h est définie sur \mathbb{R} . Par opérations, h est dérivable sur \mathbb{R} .
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = h(x)$ donc h est paire, et $h(x + \pi) = h(x)$, donc h est π -périodique.
Pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -2 \sin(x) \cos(x) F'(\cos^2(x)) + 2 \sin(x) \cos(x) G'(\sin^2(x)) \\ &= -2 \sin(x) \cos(x) \arccos(\sqrt{\cos^2(x)}) + 2 \sin(x) \cos(x) \arcsin(\sqrt{\sin^2(x)}) \\ &= -2 \sin(x) \cos(x) \arccos(\cos(x)) + 2 \sin(x) \cos(x) \arcsin(\sin(x)), \quad \text{car } x \in [0, \pi/2] \\ &= -2 \sin(x) \cos(x) x + 2 \sin(x) \cos(x) x, \quad \text{car } x \in [0, \pi/2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc h est constante sur $[0, \pi/2]$. Par périodicité et parité, h est constante sur \mathbb{R} .

Enfin, $h(\pi/4) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos(\sqrt{t}) + \arcsin(\sqrt{t}) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2} dt = \frac{\pi}{4}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{\pi}{4}$.

7. On commence par calculer $J = \int_0^\pi e^{2t} e^{3it} dt$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi e^{(2+3i)t} dt \\ &= \frac{1}{2+3i} [e^{(2+3i)t}]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2+3i} (e^{2\pi+3i\pi} - 1) \\ &= \frac{2-3i}{13} (-e^{2\pi} - 1) \\ &= \frac{-2(e^{2\pi} + 1) + 3i(e^{2\pi} + 1)}{13}. \end{aligned}$$

Donc $I = \text{Im}(J) = \frac{3(e^{2\pi} + 1)}{13}$.

8. Soit A une primitive de a sur I . L'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto K e^{-A(t)}, K \in \mathbb{R}\}$.
Soit y une fonction dérivable sur I .

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (H) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, e^{A(t)} y'(t) + a(t) e^{A(t)} y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, (e^A y)'(t) = 0 \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) e^{A(t)} = K \\ &\iff \boxed{\exists K \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = K e^{-A(t)}} \end{aligned}$$

9. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, on note r_1 et r_2 les solutions de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}, A, B \in \mathbb{R}\}$;
- si $\Delta = 0$, on note r_0 la solution de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto (A + Bx) e^{r_0 x}, A, B \in \mathbb{R}\}$;
- si $\Delta < 0$, on note $\alpha \pm i\beta$ les solutions de $ar^2 + br + c = 0$ et l'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), A, B \in \mathbb{R}\}$.

10. Notons $(H) : 2y' - y = 0 \iff y' - \frac{1}{2}y = 0$. On pose $a : x \mapsto -\frac{1}{2}$ dont $A : x \mapsto -\frac{x}{2}$ est primitive sur \mathbb{R} . L'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto K e^{\frac{x}{2}}, K \in \mathbb{R}\}$.
Notons $(E') : y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2} e^{ix}$. On pose $y_P : x \mapsto P e^{ix}$ avec $P \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y_P \text{ est solution de } (E') &\iff \forall x \in \mathbb{R}, iP e^{ix} - \frac{1}{2} P e^{ix} = \frac{1}{2} e^{ix} \\ &\iff P = \frac{1}{-1+2i} \end{aligned}$$

Donc $y_P : x \mapsto \frac{1}{-1+2i} e^{ix}$ est solution de (E') .

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, y_P(x) = \frac{-1-2i}{5} (\cos(x) + i \sin(x))$, donc $\text{Im}(y_P(x)) = \frac{-1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x)$.

L'ensemble des solutions de $2y' - y = \sin(x)$ est $\left\{ x \mapsto K e^{\frac{x}{2}} - \frac{\sin(x) + 2 \cos(x)}{5}, K \in \mathbb{R} \right\}$.

11. Notons $(H) : y' - 2y = 0$. On pose $a : t \mapsto -2$ dont une primitive est $A : t \mapsto -2t$. L'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto K e^{2t}, K \in \mathbb{R}\}$.
On pose $(E) : y' - 2y = e^{2t}$ et $y_p : t \mapsto P t e^{2t}$ avec $P \in \mathbb{R}$.

$$y_p \text{ est solution de } (E) \iff \forall t \in \mathbb{R}, 2Pt e^{2t} + P e^{2t} - 2Pt e^{2t} = e^{2t} \\ \iff P = 1$$

Donc $y_p : t \mapsto t e^{2t}$ est solution de (E) .
L'ensemble des solutions de (E) est $\{t \mapsto K e^{2t} + t e^{2t}, K \in \mathbb{R}\}$.
Soit $y : t \mapsto K e^{2t} + t e^{2t}$. $y(0) = 1 \iff K = 1$.

La solution du problème de Cauchy est $t \mapsto e^{2t}(1+t)$.

12. On pose $(H) : W' + \frac{1}{2(x+i)} W = 0$. Notons $a : x \mapsto \frac{1}{2(x+i)} = \frac{x}{2(x^2+1)} - i \frac{1}{2(x^2+1)}$ de primitive $A : x \mapsto \frac{1}{4} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \arctan(x)$. L'ensemble des solutions de (H) est $\left\{ x \mapsto K \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} e^{\frac{\arctan(x)}{2}}, K \in \mathbb{R} \right\}$.

13. On note $(E) : (1+t^2)y' + y = \arctan(t) \iff y' + \frac{1}{1+t^2} y = \frac{\arctan(t)}{1+t^2}$ et $(H) : y' + \frac{1}{1+t^2} y = 0$. On pose $a : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ de primitive $A : t \mapsto \arctan(t)$ sur \mathbb{R} . L'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto K e^{-\arctan(t)}, K \in \mathbb{R}\}$.

On pose $y_p : t \mapsto s(t) e^{-\arctan(t)}$, où s est une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

$$y_p \text{ est solution de } (E) \iff \forall t \in \mathbb{R}, s'(t) e^{-\arctan(t)} = \arctan(t) \frac{1}{1+t^2} \\ \iff \forall t \in \mathbb{R}, s'(t) = \arctan(t) \frac{1}{1+t^2} e^{\arctan(t)}$$

Or, $\int^t \arctan(x) \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan(x)} dx = [\arctan(x) e^{\arctan(x)}]_0^t - \int_0^t \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan(x)} dx = \arctan(t) e^{\arctan(t)} - e^{\arctan(t)} + C$ par IPP.

Donc on prend $y_p : t \mapsto (\arctan(t) e^{\arctan(t)} - e^{\arctan(t)}) e^{-\arctan(t)} = \arctan(t) - 1$ qui est solution de (E) .

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ t \mapsto K e^{-\arctan(t)} + \arctan(t) - 1 \right\}$.

14. Soit $(H) : y'' + y = 0$. Les solutions de l'équation caractéristique associée $r^2 + 1 = 0$ sont $\pm i$. Donc l'ensemble des solutions de (H) est $\{t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t), A, B \in \mathbb{R}\}$.
Soit $(E') : y'' + y = e^{(1+2i)t}$. On pose $y_p : t \mapsto P e^{(1+2i)t}$ où $P \in \mathbb{C}$.

$$y_p \text{ est solution de } (E') \iff \forall t \in \mathbb{R}, (1+2i)^2 P e^{(1+2i)t} + P e^{(1+2i)t} = e^{(1+2i)t} \\ \iff P = \frac{1}{-2+4i}$$

Donc $y_p : t \mapsto \frac{-1-2i}{10} e^{(1+2i)t}$ est solution de (E') .

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, y_p(t) = \left(-\frac{1}{10} - i\frac{2}{5}\right) e^t (\cos(2t) + i \sin(2t))$, donc $\text{Re}(y_p(t)) = \left(-\frac{\cos(2t)}{10} + \frac{\sin(2t)}{5}\right) e^t$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de $y'' + y = e^t \cos(2t)$ est $\left\{ t \mapsto A \cos(t) + B \sin(t) + \left(-\frac{\cos(2t)}{10} + \frac{\sin(2t)}{5}\right) e^t, A, B \in \mathbb{R} \right\}$.

15. Soit $(E) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ et $(H) : y'' + 2y' + y = 0$. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0$ dont la seule solution est -1 . Donc l'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto (A+Bx)e^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}$.

Soit $y_p : x \mapsto P x^2 e^{-x}$ où $P \in \mathbb{R}$ et de dérivées $y_p' : x \mapsto 2Px e^{-x} - P x^2 e^{-x}$ et $y_p'' : x \mapsto 2P e^{-x} - 4Px e^{-x} + P x^2 e^{-x}$.

$$y_p \text{ est solution de } (E) \iff \forall x \in \mathbb{R}, 2P e^{-x} - 4Px e^{-x} + P x^2 e^{-x} + 4Px e^{-x} - 2P x^2 e^{-x} + P x^2 e^{-x} = 2e^{-x} \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, 2P e^{-x} = 2e^{-x} \\ \iff P = 1$$

Donc $y_p : x \mapsto x^2 e^{-x}$ est solution de (E) .

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ x \mapsto (A+Bx)e^{-x} + x^2 e^{-x}, A, B \in \mathbb{R} \right\}$.

16. (a)

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-z=-2 \\ -y-3z=-6 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+2z=3 \\ y-z=-2 \\ -4z=-8 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions du système est $\{(-1, 0, 2)\}$. Les trois plans se coupent en un point.

- (b)

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=-3 \\ -x+2y+z=5 \\ 4x-5y+14z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-3y+4z=-3 \\ y+6z=7 \\ y+6z=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x=9-11z \\ y=7-6z \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions du système est $\{(9-11z, 7-6z, z), z \in \mathbb{R}\}$. Les trois plans se coupent le long d'une droite.

- (c)

$$\begin{cases} x-y=1 \\ -x+y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y=1 \\ 0=3 \end{cases}$$

donc le système est incompatible. Les deux droites sont parallèles.

17. (a) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} = \frac{(a+b)x^2 + (6a+2b+c)x + 9a-3b-x}{(x-1)(x+3)^2}$, donc il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} a+b=5 \\ 6a+2b+c=21 \\ 9a-3b-c=22 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=5 \\ -4b+c=-9 \\ -12b-c=-23 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b=5 \\ -4b+c=-9 \\ -4c=4 \end{cases}$$

donc $a=3, b=2, c=-1$.

(b) La fonction $x \mapsto 3\ln(x-1) + 2\ln(x+3) + \frac{1}{x+3}$ convient.

Correction de l'exercice 2 :

1. Le coefficient directeur de (AB) est $\frac{\frac{1}{5}-2}{3-\frac{1}{4}} = -\frac{36}{55}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $y = -\frac{36}{55}x + b$ est une équation de (AB) . Or $A \in (AB)$ donc $2 = -\frac{36}{55} \cdot \frac{1}{4} + b$ et $b = \frac{119}{55}$.

Une équation de (AB) est $y = -\frac{36}{55}x + \frac{119}{55}$.

2. Soit (x, y) un point de \mathbb{R}^2 sur (AB) et sur d :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 36x + 55y = 119 \end{cases} \xrightarrow{L_2 - 12L_1} \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 7y = 35 \end{cases}$$

donc $y = 5$ et $x = -\frac{13}{3}$. Les deux droites se coupent au point de coordonnées $\left(-\frac{13}{3}, 5\right)$.

Correction de l'exercice 3 :

- $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a > 0 \text{ et } b < 1) \Rightarrow ab > a$.
 - Non, elle est fautive : on prend $a = 1$ et $b = -1$ et on a alors $a > 0$ et $b < 1$ mais $ab < 1$.
 - P est aussi fautive car elle est équivalente à sa contraposée.
- $\exists a, b \in \mathbb{R} \mid ab \leq a \text{ et } (a > 0 \text{ et } b > 1)$.
- Non, car on peut prendre $a = -1$ et $b = -1$, on a donc $a \leq 0$ ou $b \geq 1$, mais $ab > a$.
- Analyse : soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^1 g(t) dt = 0$ et $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + a$. On intègre : $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 a dt = a$. Puis pour tout $x \in [0, 1], g(x) = f(x) - \int_0^1 f(t) dt$.
 - Synthèse : soit $a = \int_0^1 f(t) dt$ et pour tout $x \in [0, 1], g(x) = f(x) - a$. La fonction g est continue par opérations et $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + a$. Enfin, $\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 a dt = 0$.

Il existe donc une unique fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et un unique $a \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^1 g(t) dt = 0$ et $\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + a$.

Correction de l'exercice 4 :

- Comme f est trois fois dérivable sur \mathbb{R} , g est dérivable sur \mathbb{R} et $g' = f^{(3)} + f'' + f' = f + f'' + f' = g$ car f est solution de (E) . Donc g est solution de $(E') : y' - y = 0$.
 - On pose $a : x \mapsto -1$ de primitive $A : x \mapsto -x$ sur \mathbb{R} . L'ensemble des solutions de (E') est $\{x \mapsto K e^x, K \in \mathbb{R}\}$. Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = K e^x$, et donc f est solution de $(E'') : y'' + y' + y = K e^x$. Notons $(H) : y'' + y' + y = 0$ d'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$. Ses solutions sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble des solutions de (H) est $\{x \mapsto e^{-x/2}(A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2)), A, B \in \mathbb{R}\}$. Soit $y_p : x \mapsto P e^x$ où $P \in \mathbb{R}$.

$$y_p \text{ est solution de } (E'') \iff \forall x \in \mathbb{R}, P e^{-x} + P e^{-x} + P e^{-x} = K e^{-x} \\ \iff P = \frac{K}{3}$$

Donc $y_p : x \mapsto \frac{K}{3} e^x$ est solution de (E'') .

Ainsi, il existe $A, B, K \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x/2}(A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2)) + \frac{K}{3} e^x$.

2. Soient $A, B, K \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto e^{-x/2}(A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2)) + \frac{K}{3} e^x$. La fonction f est trois fois dérivable sur \mathbb{R} et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^{-x/2} \left(\frac{-A + B\sqrt{3}}{2} \cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{-B - A\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3}x/2) \right) + \frac{K}{3} e^x \\ f''(x) = e^{-x/2} \left(-\frac{A + B\sqrt{3}}{2} \cos(\sqrt{3}x/2) + \frac{A\sqrt{3} - B}{2} \sin(\sqrt{3}x/2) \right) + \frac{K}{3} e^x \\ f^{(3)}(x) = e^{-x/2} (A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2)) + \frac{K}{3} e^x$$

Donc f est bien solution de (E) .

L'ensemble des solutions de (E) est $\left\{ x \mapsto e^{-x/2} (A \cos(\sqrt{3}x/2) + B \sin(\sqrt{3}x/2)) + \frac{K}{3} e^x, A, B, K \in \mathbb{R} \right\}$.