

Devoir Surveillé 03*

(durée : 4 heures, sans calculatrice)

*On fera attention à la qualité de la rédaction.
Soulignez ou encadrez les résultats et mettez en valeur les arguments importants.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 (Une suite de complexes).

Soit u un nombre complexe non nul. On pose $z_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, $z_n = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n le point du plan complexe d'affixe z_n .

1. On suppose dans cette question que $u = i$.
Soit B et C les points du plan de coordonnées respectives $(-4, -1)$ et $(6, 3)$.
 - (a) Déterminer une équation de la droite (BC) .
 - (b) En déduire que le point A_2 est sur la droite (BC) .
2. On suppose dans cette question que $u = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
Placer successivement dans le plan complexe les points A_1, A_2, \dots, A_6 , sans calcul.
Comment sont placés les points suivants?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u pour qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n = O$.
On pourra essayer de simplifier l'expression de z_n en prenant garde à ne pas diviser par 0.

Exercice 2 (Une suite et des sommes).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n k a_k a_{n-k}.$$

1. Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 . Que peut-on conjecturer?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Montrer que $T_n = \sum_{k=0}^n (n-k) a_{n-k} a_k$.
 - (b) En déduire que $2T_n = nS_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$.
4. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n \quad \text{puis que} \quad \frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n.$$

5. En déduire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $S_n = a_{n+1}$.
6. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_n est un entier naturel.

Exercice 3 (Une somme double).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j|$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$.

Exercice 4 (Sommes de Pascal).

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Vérifier que :

$$\binom{N}{1} = N \text{ (si } N \geq 1), \quad \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} \text{ (si } N \geq 2), \quad \binom{N}{3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \text{ (si } N \geq 3), \quad \binom{N}{4} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24} \text{ (si } N \geq 4).$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : \ll \forall q \in \mathbb{N}, \text{ avec } q \leq n, \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} \gg$.

(a) En raisonnant par récurrence sur n , que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On distinguera les cas $q = n + 1$ et $q \leq n$ dans l'hérédité.

(b) Justifier que pour tout $0 \leq q \leq k - 1$, $\binom{k}{q} = \binom{k+1}{q+1} - \binom{k}{q+1}$.

(c) Redémontrer alors $\mathcal{P}(n)$ sans récurrence.

3. Interpréter cette égalité sur le triangle de Pascal.

4. En prenant $q = 1$, $q = 2$ puis $q = 3$, en déduire les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=2}^n k(k-1)$ et $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)$.

Problème 1 (Autour des solutions d'une équation du second degré).

Soit $a, b \in \mathbb{C}^*$. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2az + b = 0 \tag{E}$$

On note z_1 et z_2 les deux solutions, éventuellement confondues, de (E).

L'objectif du problème est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$ et pour que $|z_1| = |z_2|$.

1. Questions préliminaires

(a) Rappeler, en fonction de a et b , les valeurs de $z_1 + z_2$ et de $z_1 z_2$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que : $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff (z \in \mathbb{R} \text{ ou } |z| = 1)$.

(c) On considère la fonction $f : x \mapsto \left| x + \frac{1}{x} \right|$ définie sur \mathbb{R}^* .

Montrer que f admet un minimum sur \mathbb{R}^* et le calculer.

Indication : on pourra commencer par étudier la parité de f .

2. Étude d'exemples

Dans les cas suivants, a-t-on $|z_1| = |z_2|$? $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$?

(a) $z^2 - 2(1+i)z + 4i = 0$;

(b) $z^2 - (2-i)z + 3-i = 0$;

(c) $z^2 - 3(1+2i)z - 6 + 8i = 0$.

3. Une condition nécessaire et suffisante pour que $z_1 = z_2$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $z_1 = z_2$.

4. Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$

(a) On suppose que $|z_1| = |z_2|$.

i. Exprimer $\frac{a^2}{b}$ en fonction des arguments de z_1 et z_2 .

ii. Montrer que $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$.

(b) i. Montrer que si $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$ alors $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.

ii. Montrer que si $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$, alors $|z_1| = |z_2|$.

(c) Conclure.

5. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$

(a) On suppose que $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$.

i. Exprimer $\frac{b}{a^2}$ en fonction des modules de z_1 et z_2 .

ii. Montrer que $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.

(b) Montrer que si $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$, alors $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$.

On pourra poser $\lambda = \frac{b}{a^2}$ puis résoudre (E) en calculant son discriminant en fonction de a et λ .

(c) Conclure.

Correction du Devoir Surveillé 03*

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) La pente de la droite (BC) vaut $\frac{2}{5}$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que la droite (BC) admette $y = \frac{2}{5}x + b$ comme équation.

Comme le point $(-4, -1)$ est sur la droite, b vérifie $-1 = -\frac{8}{5} + b$ donc $b = \frac{3}{5}$.

Ainsi, une équation de (BC) est $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$.

(b) Comme $z_2 = 1 + i$, le point A_2 a pour coordonnées $(1, 1)$. Or, on a $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$, donc les coordonnées de A_2 vérifient l'équation trouvée dans la question précédente. Donc $A_2 \in (BC)$.

2. On place les points qui sont aux sommets d'un hexagone régulier de côté 1 avec $A_6 = O$. Les points suivants se répètent : $A_{6k+m} = A_m$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

3. Déjà, si $u = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = n$, donc O n'est pas atteint.

Supposons donc que $u \neq 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \frac{1-u^n}{1-u}$. Ainsi, $z_n = 0 \iff u^n = 1$.

Donc, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_n = O$ ssi $u \neq 1$ et u est une racine n -ième de 1.

Correction de l'exercice 2 :

1. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$ et $a_4 = 14$.

$S_0 = 1, S_1 = 2, S_2 = 5, S_3 = 14$ et $S_4 = 42$.

On peut conjecturer que $S_n = a_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) On pose $j = n - k$ dans $T_n : T_n = \sum_{j=0}^n (n-j)a_{n-j}a_j$, donc on a bien $T_n = \sum_{k=0}^n (n-k)a_{n-k}a_k$.

(b) On calcule : $2T_n = T_n + T_n = \sum_{k=0}^n (n-k)a_{n-k}a_k + \sum_{k=0}^n ka_ka_{n-k} = \sum_{k=0}^n na_ka_{n-k}$, donc $2T_n = nS_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (n+2)a_{n+1} &= \binom{2(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} \end{aligned}$$

donc $(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_{n+1}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} (n+2-k)a_{n+1-k}a_k \\ &= a_0a_{n+1} + \sum_{k=0}^n (n+2-k)a_{n+1-k}a_k \quad (\text{pour avoir } n-k \geq 0 \text{ dans la somme}) \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=0}^n 2(2(n-k)+1)a_{n-k}a_k \quad \text{question précédente} \\ &= a_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^n (n-k)a_{n-k}a_k + 2 \sum_{k=0}^n a_{n-k}a_k \\ &= a_{n+1} + 2nS_n + 2S_n \end{aligned}$$

d'après 2b. Donc $T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$.

Puis, $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}S_{n+1}$, donc $\frac{n+3}{2}S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$.

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $S_n = a_{n+1}$.

- Initialisation : voir première question.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $S_n = a_{n+1}$.

D'après la question précédente, $S_{n+1} = \frac{2}{n+3}a_{n+1} + \frac{4(n+1)}{n+3}S_n = a_{n+1} + \frac{2+4(n+1)}{n+3}$ par HR.

Donc $S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3}a_{n+1} = a_{n+2}$ d'après 3.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = a_{n+1}$.

6. On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : voir première question.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, $a_{n+1} = S_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ qui est une somme d'entiers naturels par HR. Donc $a_{n+1} \in \mathbb{N}$.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 3 :

1.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j| &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} j - i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} j - \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \\ &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n i \\ &= \sum_{j=2}^n j(j-1) - \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) \\ &= \sum_{j=2}^n j^2 - \sum_{j=2}^n j - n \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n((n+1)(2n+1) - 3(n+1) - 3n(n-1) + (n-1)(2n-1))}{6} \\ &= \frac{n((n+1)(2n-2) + (n-1)(-3n+2n-1))}{6} \\ &= \frac{n(2(n+1)(n-1) + (n-1)(-n-1))}{6} \end{aligned}$$

Donc $\sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j| = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$.

2. On sépare la somme en trois : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| = \sum_{i=j=1}^n |i - j| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |i - j| + \sum_{1 \leq j < i \leq n} |i - j|$.

Or, la première somme est nulle et les deux suivantes sont égales (en changeant le nom des indices) et leur valeur est calculée à la question précédente.

Donc $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Soit $N \geq 4$.

$$\left. \begin{aligned} \bullet \binom{N}{1} &= N \text{ (c'est du cours!)} \\ \bullet \binom{N}{2} &= \frac{N(N-1)(\cancel{N-2} \dots)}{2 \times (\cancel{N-2} \dots)} = \frac{N(N-1)}{2} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \bullet \binom{N}{3} &= \frac{N(N-1)(N-2)(\cancel{N-3} \dots)}{6 \times (\cancel{N-3} \dots)} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \\ \bullet \binom{N}{4} &= \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(\cancel{N-4} \dots)}{24 \times (\cancel{N-4} \dots)} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24} \end{aligned}$$

Donc $\binom{N}{1} = N, \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}, \binom{N}{3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ et $\binom{N}{4} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

2. (a) Montrons par récurrence sur n que pour tout $q \in \mathbb{N}$ avec $q \leq n$, $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a forcément $q = 0$, et $\sum_{k=0}^0 \binom{k}{0} = 1 = \binom{1}{1}$. La formule est vraie pour $n = 0$.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathcal{P}(n+1) : \forall q \in \mathbb{N}$ avec $q \leq n+1$, $\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \binom{n+2}{q+1}$.

Il y a deux cas à faire : si $q = n+1$, alors $\sum_{k=n+1}^{n+1} \binom{k}{n+1} = \binom{n+1}{n+1}$, donc la formule est vraie pour ce q .

Si $q \leq n$, alors $\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} + \binom{n+1}{q}$. Par hypothèse de récurrence, on a : $\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} = \binom{n+2}{q+1}$
 d'après la formule de Pascal.
 Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, $\forall n, q \in \mathbb{N}$ avec $q \leq n$, $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

(b) D'après la formule de Pascal, pour tout $0 \leq q \leq k-1$, $\binom{k}{q} + \binom{k}{q+1} = \binom{k+1}{q+1}$ donc $\binom{k}{q} = \binom{k+1}{q+1} - \binom{k}{q+1}$.

(c) On fait attention au terme $k = q$ qui n'est pas pris en compte dans la question précédente.
 Soit $n, q \in \mathbb{N}$ avec $q \leq n$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} &= \binom{q}{q} + \sum_{k=q+1}^n \left(\binom{k+1}{q+1} - \binom{k}{q+1} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=q+1}^n \binom{k+1}{q+1} - \sum_{k=q+1}^n \binom{k}{q+1} \\ &= 1 + \sum_{i=q+2}^{n+1} \binom{i}{q+1} - \sum_{k=q+1}^n \binom{k}{q+1} \\ &= 1 + \binom{n+1}{q+1} - \binom{q+1}{q+1} \\ &= \binom{n+1}{q+1}. \end{aligned}$$

On retrouve bien $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

3. On fait la somme des termes de la colonne q (qui commence à la ligne q) et on obtient le coefficient binomial placé 1 cran en dessous et à droite du dernier sommé dans la colonne.

4. • Pour $q = 1$ et $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$. Or d'après la question 1 $\binom{k}{1} = k$ et $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$. On retrouve donc $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

• Pour $q = 2$ et $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$. Or d'après la question 1 $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ et $\binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

Donc $\sum_{k=2}^n k(k-1) = 2 \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$.

• Pour $q = 3$ et $n \geq 3$, $\sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$. Or d'après la question 1 $\binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$ et $\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$.

Donc $\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = 6 \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

Correction du problème 1 :

1. (a) Relations coefficients racines : $z_1 + z_2 = 2a, z_1 z_2 = b$.

(b) On peut raisonner par double équivalence, ou bien plutôt remarquer que :

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} &\iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \\ &\iff |z|^2 z + \bar{z} - |z|^2 \bar{z} - z = 0 \\ &\iff (|z|^2 - 1)(z - \bar{z}) = 0 \\ &\iff |z|^2 = 1 \quad \text{ou} \quad z = \bar{z} \end{aligned}$$

Ainsi, $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff |z| = 1$ ou $z \in \mathbb{R}$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = f(x)$, donc f est paire.

On étudie donc f sur $]0, +\infty[: \forall x > 0, f(x) = x + \frac{1}{x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. On obtient donc les variations suivantes :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	2	$+\infty$

Donc, par parité, f admet un minimum en 1 et en -1 qui vaut 2.

2. On résout les trois équations :

(a) $\Delta = 4(1+i)^2 - 16i = -8i = 8e^{3i\pi/2} = (2\sqrt{2}e^{3i\pi/4})^2 = (-2+2i)^2$, donc $z_1 = \frac{2+2i-2+2i}{2} = 2i$ et $z_2 = \frac{2+2i+2-2i}{2} = 2$.

Ainsi, $|z_1| = |z_2|$ mais $\arg(z_1) \not\equiv \arg(z_2)[2\pi]$.

(b) $\Delta = (2-i)^2 - 12 + 4i = -9 = (3i)^2$, donc $z_1 = \frac{2-i+3i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \frac{2-i-3i}{2} = 1-2i$. Donc $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{5}$, $\cos(\arg(z_1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos(\arg(z_2)) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ainsi, $|z_1| \neq |z_2|$ et $\arg(z_1) \not\equiv \arg(z_2)[2\pi]$.

(c) $\Delta = 9(1+2i)^2 + 24 - 32i = -3 + 4i = (1+2i)^2$, donc $z_1 = \frac{3+6i+1+2i}{2} = 2+4i$ et $z_2 = \frac{3+6i-1-2i}{2} = 1+2i$. Donc $z_1 = 2z_2$.

Ainsi, $|z_1| \neq |z_2|$ mais $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$.

3. $z_1 = z_2 \iff 4a^2 - 4b = 0 \iff a^2 = b$.

4. (a) i. Notons θ_1 et θ_2 des arguments de z_1 et z_2 : $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$.

D'après les relations coefficients-racines, $\frac{a^2}{b} = \frac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2} = \frac{(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2})^2}{4e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$, donc $\frac{a^2}{b} = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) + 1}{2}$.

ii. Comme $-1 \leq \cos(\theta_1 - \theta_2) \leq 1$, on obtient d'après la question précédente, $\frac{a^2}{b} \in [0, 1]$. Par hypothèse, $a \neq 0$, donc

$\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$.

(b) i. D'après les relations coefficients-racines, $\frac{a^2}{b} = \frac{(z_1+z_2)^2}{4z_1z_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right) + \frac{1}{2}$.

Donc si $\frac{a^2}{b} \in \mathbb{R}$, alors $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.

ii. Supposons que $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$. D'après la question précédente et la question préliminaire, $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ ou $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$.

• Si $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+$, $\frac{a^2}{b} = \frac{1}{4} f\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \frac{1}{2} \geq 1$ d'après la question 1c. Donc $f\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 2$ et $\frac{z_1}{z_2} = 1$, donc $z_1 = z_2$.

• Si $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_-$, $\frac{a^2}{b} = -\frac{1}{4} f\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \frac{1}{2} \leq 0$ d'après la question 1c. Donc ce cas est impossible.

• Si $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$, alors $|z_1| = |z_2|$.

Dans tous les cas, on a $|z_1| = |z_2|$.

(c) On a montré que : $|z_1| = |z_2| \iff \frac{a^2}{b} \in]0, 1]$.

5. (a) i. Notons $\theta \in \mathbb{R}$ un argument commun à z_1 et z_2 : $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$.

Donc $\frac{b}{a^2} = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \frac{4|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$.

ii. Comme $(|z_1| - |z_2|)^2 \geq 0$, on a $(|z_1| + |z_2|)^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 + 4|z_1||z_2| \geq 4|z_1||z_2|$.

Ainsi, $\frac{4|z_1||z_2|}{(|z_1| + |z_2|)^2} \leq 1$, et comme $b \neq 0$, d'après la question précédente, $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.

(b) Supposons que $\frac{b}{a^2} \in]0, 1]$. Posons $\lambda = \frac{b}{a^2}$. Alors $\Delta = 4a^2 - 4b = 4a^2 - 4\lambda a^2 = 4a^2(1 - \lambda) = (2a\sqrt{1-\lambda})^2$. Donc $z_1 = a + a\sqrt{1-\lambda} = a(1 + \sqrt{1-\lambda})$ et $z_2 = a - a\sqrt{1-\lambda} = a(1 - \sqrt{1-\lambda})$. Ainsi, $\arg(z_1) \equiv \arg(a) \equiv \arg(z_2)[2\pi]$.

(c) On a montré que : $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi] \iff \frac{b}{a^2} \in]0, 1]$.